

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 08 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et Informatique
Et Science de L a Matière
Département de Mathématiques



Polycopie de Cours

Présentés aux Etudiants

Licence Académique en mathématiques

Option : Analyse

Par

Dr.Amel Berhail

Intitulé

Optimisation Sans Contraintes

Octobre 2016

Table des matières

INTRODUCTION	03
Chapitre I : NOTIONS DE CONVEXITE	04
I.1. Ensembles convexe.....	05
I.1.1. Opérations sur les ensembles convexes.....	06
I.1.2. Enveloppe convexe.....	06
I.1.3. Théorème de séparation.....	09
I.2. Fonctions convexes.....	11
I.2.1. Définitions et propriétés d'une fonction convexe	11
I.2.2. Continuité des fonctions convexes.....	12
I.2.3. Différentiabilité et fonctions convexes.....	13
I.2.4. Sous différentiel et fonctions convexes.....	13
I.2.5. Caractérisation des fonctions convexe.....	15
I.3. Exercices	22
Chapitre II : OPTIMISATION SANS CONTRAINTES	24
II.1. Généralités.....	24
II.2. Quelques exemples.....	26
II.3. Solution Optimale.....	28
II.4. Résultats d'existence et d'unicité.....	28
II.5. Direction de descente	32
II.6. Conditions d'optimalité	33
II.6.1. Condition d'optimalité nécessaires du premier ordre	33
II.6.2. Condition d'optimalité nécessaires du deuxième ordre.....	34
II.6.3. Condition d'optimalité suffisante du deuxième ordre	35
II.7. Exercices.....	38

Chapitre III : METHODES ITERATIVES d'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES	41
III.1. Notion d'algorithme.....	41
III.2. Modes de Convergence.....	41
III.3. Schémas général des algorithmes d'optimalité.....	42
III. 4. Méthode de Gradient.....	43
III.4.1. Méthode de Gradient à pas optimal.....	43
III.4.2. Méthode de Gradient à pas fixe.....	46
III.5. Méthode des gradients conjugués	49
III.6 . Méthode de Newton	52
III.7. Méthode de Quasi-Newton	56
III.8. Exercices.....	57
Corrigées des exercices.....	59
BIBLIOGRAPHIE.....	69

INTRODUCTION

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble. Elle est aussi un sujet très vaste qui touche aussi bien au calcul des variations qu'à la recherche opérationnelle (domaine à la frontière entre l'informatique, les mathématiques et l'économie), dans les mathématiques appliquées (fondamentales pour l'industrie et l'ingénierie), en analyse et en analyse numérique, en statistique pour l'estimation du maximum de vraisemblance d'une distribution, pour la recherche de stratégies dans le cadre de la théorie des jeux, ou encore en théorie du contrôle et de la commande.

Aujourd'hui, tous les systèmes susceptibles d'être décrits par un modèle mathématique sont optimisés. La qualité des résultats et des prédictions dépend de la pertinence du modèle, de l'efficacité de l'algorithme et des moyens pour le traitement numérique.

De façon générale, les techniques d'optimisations jouent un rôle de plus en plus important pour la conception des systèmes et des équipements de toute nature, et toutes les décisions technique ou économiques. Puisque les gens en général recherchent ce qu'il ya de meilleur et lorsque plusieurs possibilités se présentent, leur choix se porte tout naturellement vers la variante « optimal ». Ce mot provient du latin « optimum » qui veut dire meilleur et parfait.

Euclide formulait déjà des problème d'optimisation au III^{ème} siècle avant J-C. Sir Isaac Newton (1642-1727), auteur du célèbre « Mathematical Principales of Natural Philosophy », ainsi que Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) offrirent, si c'est à l'antiquité que remonte les premiers problèmes de maximum et de minimum, on peut dire que c'est à la fin du dix-septième et au dix-huitième siècle qu'apparaissent les premières méthodes générales de solutions. Le développement de l'analyse mathématique en particulier le calcul différentiel (newton, Pappus), l'introduction de fonctionnelle (Euler, Lagrange) a permis à l'optimisation de jouer un rôle important dans le secteur des sciences exactes, ou la plupart des principes physiques peuvent s'énoncer sous forme variationnelle.

Optimiser, c'est donner les meilleurs conditions de fonctionnement de rendement et d'un point de vue mathématique l'optimisation consiste à rechercher le minimum ou le maximum d'une fonction avec ou sans contraintes, cependant on limite souvent l'optimisation à une recherche de minimum. Plus précisément on cherche par exemple à caractériser le point qui réalise un minimum d'une fonction différentiable dans tous l'espace ou lorsque ce minimum est réalisé à l'intérieure de l'ensemble des contraintes.

Les problèmes considérés ici s'écrivent sous la forme standard suivant: optimiser le problème $\{f(x), x \in R^n\}$ où la fonction f est linéaire ou non ; donc pour choisir la possibilité optimal, on est amené à résoudre les problèmes de recherche d'un maximum ou d'un minimum qui sont appelés « Problèmes d'extrémums ».

Dans ce cours, nous nous intéressons aux méthodes numériques pour l'optimisation continue, différentiable. Le premier chapitre traite des notions mathématiques fondamentales à maîtriser avant de s'intéresser à la résolution à proprement parler de tout problème d'optimisation : nous allons donner quelques définitions et concepts de la théorie convexe.

Dans le deuxième chapitre, nous entrons dans le vif du sujet en nous intéressant à la résolution de problèmes d'optimisation sans contrainte, nous tenterons de répondre aux questions suivantes : Existe-t-il une solution du problème considéré ? si oui, a-t-on unicité ? Comment la caractériser ? (conditions d'optimalité). Enfin, dans le chapitre 3 ; nous donnerons quelques méthodes numériques pour la résolution des problèmes d'optimisation sans contraintes où on va répondre aux questions suivantes : Comment calculer la solution optimal? et quel type d'algorithme choisir ?

Chapitre 1

NOTIONS DE CONVEXITE

En mathématiques, le mot « *convexe* » est utilisé dans la désignation de deux notions bien distinctes quoique apparentées : Lorsqu'il se rapporte à une forme géométrique, un ensemble de points, il renvoie au concept d'ensemble convexe. Lorsqu'il se rapporte à une fonction, il renvoie au concept de fonction convexe. En économie, la convexité est un indicateur de risque de taux directement lié au concept mathématique de fonction convexe. Dans la langue courante le mot « convexité » a un sens directement relié au concept mathématique d'ensemble convexe, la convexité d'un objet désignant la partie de celui-ci qui a une forme bombée. On retrouve ce même sens en optique géométrique, notamment pour qualifier des miroirs ou des lentilles.

Dans ce chapitre nous introduisons la notion d'ensemble et fonction convexe, démontrons leurs principales propriétés géométriques et topologiques.

1.1. Ensembles convexes

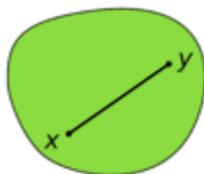
Définition : Un ensemble S de \mathbb{R}^n est dite convexe si :

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0, 1], \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S.$$

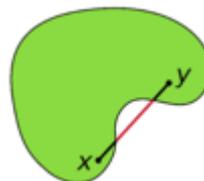
où bien

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \alpha + \beta = 1, \alpha x_1 + \beta x_2 \in S.$$

En d'autre terme, Un objet géométrique S est dit convexe lorsque, chaque fois qu'on y prend deux points x et y de S , le segment $[x, y]$ qui les joint est entièrement contenu dans S .



Convexe



Non convexe

Exemples :

- Tout disque, ainsi un cube plein, une boule sont convexes.
- La couronne n'est pas un ensemble convexe. Ainsi tous objet creux ne l'est pas.
- Toutes partie affine est convexe car un ensemble S de \mathbb{R}^n est dit affine si :

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S.$$

- La partie de \mathbb{R}^n définie par $\{x \text{ de } \mathbb{R}^n ; x \text{ positif}\}$ est un convexe appelé orthant positif.

I.1.1. Opérations sur les ensembles convexes**Proposition 1:**

1- Soit $(S_i, i \in I \subset N)$ convexe de R^n , alors $(\bigcap_{i \in I} S_i)$ est un convexe mais $(\bigcup_{i=1, n} S_i)$ n'est pas nécessairement un ensemble convexe.

2- Soit $S \in R^n$ un ensemble convexe, alors \bar{S} est un convexe.

3- Soit $S \in R^n$ un ensemble convexe avec $\text{int}(S) \neq \emptyset$, alors $\text{int}(S)$ est un convexe.

4- La somme de deux convexes est un convexe.

5- Le produit d'un convexe avec un scalaire est un convexe.

6- L'image directe et l'image réciproque d'un convexe par une application linéaire est un convexe.

Preuve : Exercices

Combinaison convexe

Définition : On appelle combinaison convexe d'un 'n' éléments $x_i \in R^n$ tout élément y de R^n s'écrit sous la forme:

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ avec les points } \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

I.1.2. Enveloppe convexe**Définition :**

L'enveloppe convexe d'un ensemble $S \in R^n$ d'éléments $x_i \in R^n$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des points $x_i \in R^n$.

C'est aussi le plus petit convexe contenant S qui est donc l'intersection de tous les convexes contenant S, on le note par **H(S) ou Conv(S)** :

$$x \in H(S) \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in S \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R^+ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

et

$$H(S) = \bigcap \{A, A \text{ est un convexe contenant } S\}$$

Exemple :

1- Soit $S = \{x, y\}$ alors H(S) est le segment $[x, y]$.

2- Soit $S = \{x, y, z\}$ alors H(S) est un triangle fermée de sommets x, y, z.

Proposition 2:

Soit $S \subset R^n$ quelconque alors H(S) est convexe. De plus, H(S) est le plus petit convexe qui contient S.

Preuve :

Soit $x \in H(S) \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in R_+$ et $x_1, \dots, x_p \in S$ tq $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$.

et $y \in H(S) \Rightarrow \exists \mu_1, \dots, \mu_l \in R_+$ et $y_1, \dots, y_l \in S$ tq $\sum_{j=1}^l \mu_j = 1$ et $y = \sum_{j=1}^l \mu_j y_j$.

Soit $\beta \in [0,1]$: $\beta x + (1 - \beta)y = \beta(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p) + (1 - \beta)(\mu_1 y_1 + \dots + \mu_l y_l)$

$$= \beta \lambda_1 x_1 + \dots + \beta \lambda_p x_p + (1 - \beta) \mu_1 y_1 + \dots + (1 - \beta) \mu_l y_l$$

Avec $\beta \lambda_i \geq 0$, $(1 - \beta) \mu_j \geq 0$, $i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, l$ et

$$\begin{aligned} \beta \lambda_1 + \dots + \beta \lambda_p + (1 - \beta) \mu_1 + \dots + (1 - \beta) \mu_l &= \beta(\lambda_1 + \dots + \lambda_p) + (1 - \beta)(\mu_1 + \dots + \mu_l) \\ &= \beta \cdot 1 + (1 - \beta) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Donc $\beta x + (1 - \beta)y \in H(S) \Rightarrow H(S)$ convexe.

Remarque: L'enveloppe convexe d'un ensemble fini non vide de R^n s'appelle un **polytope**.

Un cas particulier d'un polytope est le **simplexe** : l'enveloppe convexe de $(n+1)$ points (v_1, \dots, v_{n+1}) affinement indépendants de R^n :

$$Conv(v_1, \dots, v_{n+1}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Les points (v_1, \dots, v_{n+1}) s'appellent les sommets du simplexe.

Théorème de Carathéodory : Soit S une partie de R^n (ou d'un espace vectoriel E de dimension n).

Alors tout élément de $conv(S)$ peut s'écrire comme une combinaison convexe de $(n + 1)$ éléments de S

$$\forall S \subseteq R^n, Conv(S) = \left\{ y = \sum_{i=1}^{k \leq n+1} \lambda_i x_i, x_i \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1. \right\}$$

Remarques

1-Un ensemble $S \subset R^n$ est dite strictement convexe s'il vérifie

$$\forall x_1, x_2 \in S; x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in]0,1[, (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \in \text{int}(S).$$

2--Un ensemble $S \subset R^n$ est dite fortement convexe s'il vérifie

$$\forall x_1, x_2 \in S; x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in]0,1[, \exists \alpha > 0; B(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \alpha) \in S.^1$$

$S \subset R^n$ est fortement convexe \Rightarrow S strictement convexe \Rightarrow S convexe

¹ c'est la boule de centre $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ et de rayon α .

I.1.3. Théorème de séparation

Supposons que nous avons deux ensembles convexes dans R^n , quand pouvons nous les séparer par un hyperplan ? c'est-à-dire trouver une forme linéaire non nulle qui en tout point d'un des ensembles est supérieur ou égale à sa valeur en n'importe quel point de l'autre ensemble ?

La réponse forme, dans un sens, le cœur de l'analyse convexe.

Définition : Soit $p \in R^n$, $p \neq \vec{0}$ et $\alpha \in R$. On appelle Hyperplan H l'ensemble suivant :

$$H(p, \alpha) = \{x \in R^n, (p, x) = \alpha\}$$

P : s'appelle vecteur normal à H .

A tout hyperplan H on associe H^+ et H^- définie comme suit :

$$H^+ = \{x \in R^n, p^t x \geq \alpha\} \text{ demi espace supérieure fermé.}$$

$$H^- = \{x \in R^n, p^t x \leq \alpha\} \text{ demi espace inférieure fermé.}$$

Remarque : Si $\hat{x} \in H$ donc $p^t \hat{x} = \alpha$ et puisque $\forall x \in H, p^t x = \alpha$ donc : $p^t (x - \hat{x}) = 0$, donc

$$H = \{x \in R^n, p^t (x - \hat{x}) = 0\}$$

Définition :

a) Soient S_1, S_2 deux ensembles non vide de R^n on dit que l'hyperplan $H(p, \alpha)$ sépare simplement les ensembles S_1, S_2 ssi $p^t x_1 \leq \alpha \leq p^t x_2, \forall x_1 \in S_1, \forall x_2 \in S_2$ c-à-d :

$$p^t x \leq \alpha, \forall x \in S_1 (S_1 \subset H^-) \text{ et } p^t x \geq \alpha, \forall x \in S_2 (S_2 \subset H^+)$$

b) Si, en plus de (a) on a : $S_1 \cap S_2 \subset H$, on dit que H sépare proprement S_1 et S_2 .

c) On dit que l'hyperplan $H(p, \alpha)$ sépare strictement S_1 , et S_2 ssi :

$$p^t x < \alpha, \forall x \in S_2 \text{ et } p^t x > \alpha, \forall x \in S_1$$

c) L'hyperplan $H(p, \alpha)$ sépare fortement S_1 , et S_2 ssi :

$$\exists \varepsilon > 0, p^t x \leq \alpha + \varepsilon, \forall x \in S_2 \text{ et } p^t x \geq \alpha + \varepsilon, \forall x \in S_1$$

Exemple :

1-L'hyperplan donné par $p^t x = 1$ dans R , sépare proprement les ensembles convexes

$$S = \{x \in R / x \leq 1\} \text{ et } T = \{x \in R / x \geq 1\}.$$

2-L'hyperplan donné par $p^t x = x_2 - x_1 = 1$ dans R^2 ,

sépare proprement les ensembles convexes

$$S = \{x \in R^2, 0 \leq x_1 \leq 1, 3 \leq x_2 \leq 5\} \text{ et } T = \{x \in R^2, x_1 \geq -1, x_2 = 0\}.$$

Remarque :

La séparation forte \Rightarrow la séparation propre.

Théorème de séparation fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe fermé non vide et $y \notin S$, alors il existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que

$$p^t y > \alpha, \quad p^t x \leq \alpha, \quad \forall x \in S$$

En d'autres termes, il existe un hyperplan H du vecteur normal p et une constante α qui sépare le point y et S .

Preuve : D'après le théorème de meilleure approximation $\exists \hat{x} \in S$ tel que

$$(y - \hat{x})^t (x - \hat{x}) \leq 0, \quad \forall x \in S \quad (*)$$

Prenons

$$p = y - \hat{x}, \quad p \neq 0 \text{ et } \alpha = (y - \hat{x})^t \hat{x}$$

$$p^t y - \alpha = (y - \hat{x})^t y - (y - \hat{x})^t \hat{x} = (y - \hat{x})^t (y - \hat{x}) = \|y - \hat{x}\|^2 > 0,$$

Donc

$$p^t y - \alpha > 0, \quad (\text{non nul si non } y \in S \text{ contradiction}) \Rightarrow p^t y > \alpha.$$

On obtient de (*) que

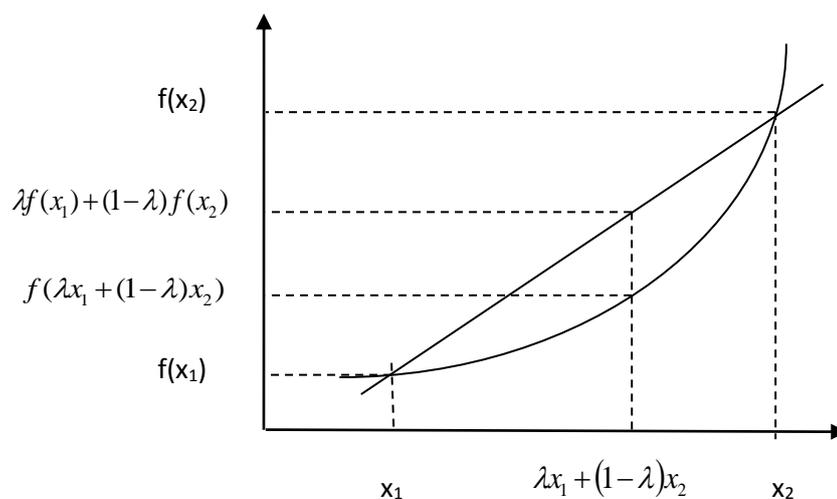
$$p^t (x - \hat{x}) \leq 0 \Rightarrow p^t x \leq p^t \hat{x} \Rightarrow p^t x \leq \alpha.$$

I.2. Fonctions convexes**Définition :**

Soit une fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ défini sur un sous-ensemble S convexe non vide de \mathbb{R}^n à valeurs réelles.

La fonction f est dite convexe sur S si et seulement si pour tous $x_1, x_2 \in S$

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$



-Si l'inégalité ci-dessus est stricte quel que soient $x_1 \neq x_2$ et $0 < \lambda < 1$, la fonction f s'appelle Strictement convexe c'est à dire

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

-La fonction f est dite fortement convexe ou α -convexe sur S s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, \forall \lambda \in]0,1[, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - \frac{1}{2}\alpha\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2.$$

Remarque :

1-La fonction f sera dite concave si et seulement si $(-f)$ est convexe.

2-Une fonction réelle d'une variable réelle est dite convexe si son graphe est « tourné vers le haut » ; on veut dire par là que si A et B sont deux points du graphe de la fonction le segment $[A,B]$ est entièrement situé au-dessus du graphe. À l'inverse, une fonction dont le graphe est « tourné vers le bas » est dite **concave**.

3-Une fonction fortement convexe est donc strictement convexe avec une inégalité de convexité renforcée par un terme quadratique lui donnant une courbure au moins égale à α . Donc :

$$\alpha\text{-convexe} \Rightarrow \text{Strictement convexe} \Rightarrow \text{Convexe.}$$

3-Si f et g sont deux fonctions convexes, alors $(f+g)$ est une fonction convexe (il suffit de s'appuyer sur la définition et de sommer les deux inégalités).

Exemples :

1-La fonction $f : x \rightarrow |x|$ est convexe puisque d'après l'inégalité triangulaire

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \leq \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2| ; \forall \lambda \in [0;1]$$

2-Toute fonction affine est convexe et concave à la fois.

Proposition : Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et S_α l'ensemble de niveau α

donné par :

$$S_\alpha = \{x \in S, f(x) \leq \alpha\},$$

si f est convexe alors S_α est convexe.

Preuve : Soient $x_1, x_2 \in S_\alpha$ donc : $f(x_1) \leq \alpha$ et $f(x_2) \leq \alpha$. On veut démontrer que

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_\alpha, \text{ avec } \lambda \in (0,1)$$

En effet,

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (\text{car } f \text{ est convexe}) \\ &\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S_\alpha, \text{ d'où } S_\alpha \text{ est un convexe.} \end{aligned}$$

I.2.1. Définitions et propriétés d'une fonction convexe

Épigraphe d'une fonction convexe

Définition : Soient S un ensemble de \mathbb{R}^n non vide et $f: S \rightarrow \mathbb{R}$. L'épigraphe de f qu'on note « epi(f) » est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n+1} défini par :

$$epi(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in S, y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$$

qui est équivalent à

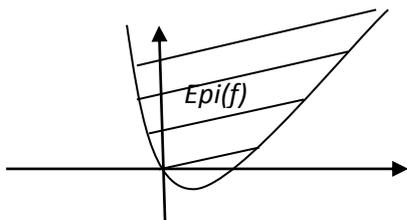
$$epi(f) = \{(x, y) \in S \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$$

C'est à dire l'ensemble des points qui sont au-dessus du graphe de f .

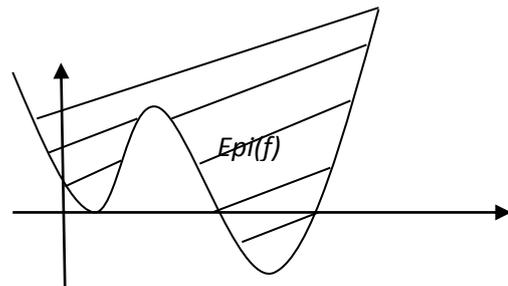
Théorème :

Soient S un ensemble convexe de \mathbb{R}^n non vide et $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, alors

La fonction f est convexe \Leftrightarrow L'ensemble (epi(f)) est convexe.



epi(f) Convexe



epi(f) Non convexe

Preuve :

1-La fonction f est convexe \Rightarrow epi(f) est convexe

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in epi(f) \Rightarrow y_1 \geq f(x_1), y_2 \geq f(x_2)$, et pour tout $\lambda \in (0,1)$, on a

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \text{ car } f \text{ est convexe}$$

Donc $[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] \in epi(f)$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in epi(f), \forall \lambda \in (0,1), \lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in epi(f).$$

2- epi(f) est convexe \Rightarrow f est convexe

Soit epi(f) un ensemble convexe, donc :

$$\forall (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in epi(f) \Rightarrow \forall \lambda \in (0,1), \lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) \in epi(f)$$

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)) \in epi(f)$$

$\Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$. On obtient la convexité de f .

Remarque :

1-À l'inverse, une fonction est dite **concave** c'est alors son hypergraphe - l'ensemble des points qui sont en-dessous du graphe - est convexe.

2-La projection de $\text{epi}(f)$ sur \mathbf{R}^n est appelé domaine effectif de f

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) < +\infty\} \\ &= \{x \in \mathbf{R}^n; \exists \alpha \in \mathbf{R}, (x, \alpha) \in \text{epi}(f)\}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, si f est une fonction convexe alors $\text{dom}(f)$ est un convexe (image du convexe par une application linéaire).

Inégalité de Jensen

Proposition : Soit f une fonction convexe et soit S le domaine de f . Alors pour n'importe quelle combinaison convexe

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

des points de S , on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Cette inégalité est appelée « inégalité de Jensen ».

Preuve : La preuve est immédiate :

les points $(f(x_i), x_i)$ appartiennent clairement à l'épigraphe de f ; comme f est convexe, son épigraphe est un ensemble convexe, de sorte que la combinaison convexe

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (f(x_i), x_i) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right)$$

de ces points appartient également à l'ensemble $\text{epi}(f)$. Par la définition de l'épigraphe, ça implique

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right).$$

I.2.2. Continuité des fonctions convexes**Proposition :**

Soient S un ensemble de \mathbf{R}^n non vide et $f: S \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe ; alors f est continue dans $\text{int}(S)$.

Preuve : Une fonction convexe définie sur un ouvert de \mathbf{R}^n est localement lipchitzienne, donc localement absolument continue, et donc continue

I.2.3. Différentiabilité et fonctions convexes

Dérivée directionnelle :

En tout point de son domaine, une fonction convexe admet des dérivées directionnelles suivant toutes directions.

Définition 1: Soient

$S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in S$ et " d " un vecteur de \mathbb{R}^n tq $(\hat{x} + \lambda d) \in S$, pour λ assez petit ($\lambda > 0$). La

dérivée directionnelle de f au point \hat{x} dans la direction « d » qu'on note $f'(\hat{x}, d)$ est donnée par la

limite (si elle existe) suivante :

$$f'(\hat{x}, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda}$$

Définition 2:

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in S$. La fonction f est dite différentiable au point \hat{x} , s'il existe un vecteur

$\nabla f(\hat{x})$ de \mathbb{R}^n nommé « le gradient de f en \hat{x} » et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tq :

$f(x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})'(x - \hat{x}) + \|x - \hat{x}\| \alpha(\hat{x}, x - \hat{x})$, $\forall x \in S$, où $\alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \hat{x}$.

Remarques

1- Le gradient d'une fonction f en un point $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ est le vecteur de \mathbb{R}^n donné par :

$$\nabla f(\hat{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{x}) \right)'$$

2- On dit que f est différentiable dans \mathbb{R}^n si elle est différentiable en tout point de \mathbb{R}^n .

3- Si f est différentiable en un point \hat{x} de \mathbb{R}^n alors f est continue au point \hat{x} .

I.2.4 Sous différentiel et fonctions convexes

En mathématiques, le **sous-différentiel** est un concept permettant de décrire la variation locale d'une fonction convexe (à valeurs réelles) non nécessairement différentiable, donc ; le sous-différentiel est un substitut de la notion de gradient pour les fonctions convexes non différentiables.

Au lieu d'être la pente de l'application linéaire tangente (c'est-à-dire, la dérivée) au point considéré, qui n'existe pas nécessairement, le sous-différentiel d'une fonction convexe est l'ensemble des pentes de tous les minorants de la fonction, qui sont exactes en ce point, c'est-à-dire qui ont en ce point la même valeur que la fonction convexe qu'elles minorent.

La convexité de la fonction assure qu'on peut lui trouver des minorants exacts en presque tout point de son domaine ; on met donc à profit cette propriété pour définir le sous-différentiel.

a-Sous différentiel d'une fonction à une seule variable

Une sous-dérivée d'une fonction convexe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, en un point \hat{x} de l'intervalle ouvert I de \mathbb{R} est un nombre réel ξ tel que

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi(x - \hat{x}).$$

pour tout x dans I.

On peut montrer que l'ensemble des sous-dérivées en \hat{x} est un ensemble non vide qui est un intervalle fermé de la forme $[a, b]$, avec a et b les bornes :

$$a = \lim_{x \rightarrow \hat{x}^-} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}} \quad b = \lim_{x \rightarrow \hat{x}^+} \frac{f(x) - f(\hat{x})}{x - \hat{x}}$$

que l'on sait exister et vérifier. $a \leq b$

L'ensemble $[a, b]$ de toutes les sous-dérivées est appelé le sous-différentiel de la fonction f en \hat{x} , on le note par : $\partial f(\hat{x})$.

Exemple : La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en 0. On calcule $\partial f(0)$

$$\xi \in \partial f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) + \xi(x - 0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \Leftrightarrow |x| \geq \xi x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \partial f(0) = [-1, 1].$$

Le sous-différentiel en n'importe quel point $x_0 < 0$ est le singleton $\{-1\}$ et le sous-différentiel en n'importe quel point $x_0 > 0$ est le singleton $\{1\}$.

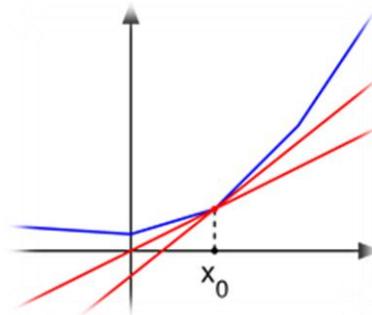
b-Sous différentiel d'une fonction de plusieurs variables

Définition :

-Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ est appelé sous-gradient de f au point

$$\hat{x} \in S \text{ si } f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^t(x - \hat{x}), \quad \forall x \in S.$$

-L'ensemble de tous les sous gradient de f au point $\hat{x} \in S$ s'appelle : « sous-différentiel » et on le note par : $\partial f(\hat{x})$.



Les sous gradient en rouge

On dit que f est sous différentiable en x si $\partial f(x) \neq \emptyset$

Exemple :

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = |x| + 2|y|$. Déterminer le sous-différentiel de f au point $(1, 0)$?

$$\partial f(1, 0) = \{(1, \alpha), \alpha \in [-2, 2]\}$$

I.2.5 .Caractérisation des fonctions convexe**A-Fonction d'une seule variable**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est convexe si et seulement si sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes, autrement dit, si l'image du barycentre est plus petit que le barycentre des images.

Proposition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante sur I , c-à-d :

$$\text{La fonction } f \text{ est convexe} \Leftrightarrow f' \text{ est croissante sur } I$$

Preuve :

1-Supposons que f convexe et montrons que f' est croissante.

Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Alors, par la convexité de f

$$f(x + \lambda_1 d) = f\left(\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)x + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(x + \lambda_2 d)\right) \leq \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)f(x) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}f(x + \lambda_2 d)$$

Donc
$$\frac{f(x + \lambda_1 d) - f(x)}{\lambda_1} \leq \frac{f(x + \lambda_2 d) - f(x)}{\lambda_2}$$

D'où le résultat.

2- Supposons que f' croissante, et montrons que f est convexe. Soient donc x, y tel que $y > x$.

Montrons que l'application $\phi : t \rightarrow tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y)$

est positive sur $[0, 1]$. On constate que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. De plus,

$$\phi'(t) = f(x) - f(y) + (y - x)f'((x - y)t + y).$$

Or $y - x > 0$, donc on a $\phi'(t) = k + af'(y - at)$, avec $a > 0$. Cette fonction est décroissante, puisque f' est croissante. Si $\phi'(1) > 0$, alors quelque soit $t \in [0, 1]$,

$$\phi'(t) > 0 \text{ et } \phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t) dt > \phi(0) = \phi(1),$$

ce qui est absurde. D'où $\phi'(1) \leq 0$.

Par un raisonnement analogue, on montre que $\phi'(0) \geq 0$. De là, on déduit facilement que :

$\forall t \in [0, 1], \phi(t) \geq 0$ (sinon, en raisonnant sur les valeurs de la dérivée notamment, on trouve rapidement une contradiction). Donc f est convexe.

Corollaire :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} . La fonction f est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est à valeurs positives ou nulles.

La fonction f est convexe $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ sur I .

La fonction f est concave $\Leftrightarrow f'' \leq 0$ sur I .

Exemples :

1-la fonction $f(x) = x^2$ est convexe car $f''(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2-la fonction $f(x) = \exp x$ est convexe car $f''(x) = \exp x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3-la fonction $f(x) = \ln x$ est concave car $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in]0; +\infty[$.

Inégalité de pentes

1-Soit $x_0 \in I$, P_{x_0} désigne la fonction réelle, définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, P_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On dit que P_{x_0} est une fonction de pente issue de x_0 .

2-Soit f une fonction réelle, dérivable et convexe, $x_0, y_0 \in I$ avec $x_0 < y_0$, alors

$$f'(x_0) \leq P_{x_0}(y_0) \leq f'(y_0)$$

Proposition :

Soit f une fonction réelle, dérivable. IL ya une équivalence entre

1-La fonction f est convexe sur I .

2-Pour tout $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a < b < c$; on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

3-Pour tout $x_0 \in I$, P_{x_0} est croissante sur son ensemble de définition.

B-Fonction de plusieurs variables**Théorème 1 :**

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, On suppose que f admet en chaque point $\hat{x} \in \text{int}(S)$ un sous-gradient ξ tel que

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi'(x - \hat{x}), \quad \forall x \in S.$$

Alors f est convexe dans $\text{int}(S)$.

Preuve :

Soient $x_1, x_2 \in \text{int}(S)$ et $\lambda \in]0,1[$. $\text{int}(S)$ est convexe donc $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \text{int}(S)$ et comme f a un sous gradient en $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, c'est-à-dire

$$f(x) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \xi'(x - (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)), \quad \forall x \in S.$$

Prenons $x=x_1$ on obtient

$$f(x_1) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \xi'(1-\lambda)(x_1 - x_2), \quad \forall x \in S. \quad (1)$$

Prenons maintenant $x=x_2$ on obtient

$$f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \lambda \xi'(x_1 - x_2), \quad \forall x \in S. \quad (2)$$

Multipliant (1) par λ et (2) par $(1-\lambda)$ on aura :

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Donc, f est convexe dans $\text{int}(S)$.

Remarque :

Si l'ensemble S est ouvert, l'existence du sous gradient est assurée partout dans S .

Théorème 2 :

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, convexe et non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors :

- a) La fonction f est convexe sur S si et seulement si

$$\forall \hat{x} \in S; f(x) \geq f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}), \quad \forall x \in S.$$

- b) La fonction f est strictement convexe sur S si et seulement si

$$\forall \hat{x} \in S; f(x) > f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}), \quad \forall x \in S, x \neq \hat{x}.$$

Preuve :**1) Nécessité**

Comme la fonction f est différentiable sur l'ouvert S donc elle est différentiable en chaque point \hat{x} de S alors f admet en \hat{x} un seul sous gradient qui est $\nabla f(\hat{x})$. ($\partial f(\hat{x}) = \nabla f(\hat{x})$).

Soit f convexe ; alors pour toutes paire de points x, \hat{x} de S et pour tout $\lambda \in (0,1)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\hat{x})$$

Ce qui s'écrit sous la forme

$$f(\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})) - f(\hat{x}) \leq \lambda(f(x) - f(\hat{x}))$$

Se référant au théorème de Taylor, il existe $\tau \in (0,1)$ tel que

$$f(\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})) = f(\hat{x}) + (\nabla f[\tau(\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})) + (1-\tau)\hat{x}])^t (y + \lambda(x - \hat{x}) - \hat{x})$$

$$f(\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})) - f(\hat{x}) = \lambda(\nabla f[\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})])^t (x - \hat{x}).$$

Combinant les deux relations,

$$(\nabla f[\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})])^t (x - \hat{x}) \leq \lambda(f(x) - f(\hat{x}))$$

Par conséquent, en prenant la limite lorsque $\lambda \rightarrow 0$ on obtient

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\nabla f[\hat{x} + \lambda(x - \hat{x})])^t (x - \hat{x}) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} (f(x) - f(\hat{x}))$$

Ou encore

$$(\nabla f(\hat{x}))^t (x - \hat{x}) \leq (f(x) - f(\hat{x})) \Rightarrow f(x) \geq f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))^t (x - \hat{x}),$$

2) Suffisance

Puisque

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))^t (x - \hat{x}), \quad \forall x \in S$$

donc

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) + (\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}))^t (x - \lambda x - (1-\lambda)\hat{x}),$$

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) + (\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}))^t (y - \lambda x - (1-\lambda)\hat{x}),$$

Les deux inéquations s'écrivent respectivement

$$f(x) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) + (1-\lambda)(\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}))^t (x - \hat{x}),$$

et

$$f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) - \lambda \nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x})^t (x - \hat{x}),$$

Multipliant la première par λ et la deuxième par $(1-\lambda)$

$$\lambda f(x) \geq \lambda f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) + \lambda(1-\lambda)(\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}))'(x - \hat{x}),$$

$$(1-\lambda)f(\hat{x}) \geq (1-\lambda)f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) - \lambda(1-\lambda)\nabla f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x})'(x - \hat{x}),$$

Additionnons les deux relations résultantes

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\hat{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(\hat{x})$$

Remarque :

Du théorème précédent, on conclut que la fonction $\nabla f(\hat{x})$ est monotone sur S c'est-à-dire :

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(\hat{x}), x - \hat{x} \rangle \geq 0, \quad \forall x, \hat{x} \in S.$$

Fonction convexe deux fois différentiable

Définition :

Soient $S \subset \mathbb{R}^n, f : S \rightarrow \mathbb{R}, \hat{x} \in S$. La fonction f est dite deux fois différentiable au point \hat{x} , s'il existe un vecteur $\nabla f(\hat{x})$ de \mathbb{R}^n nommé « le gradient de f en \hat{x} » et une matrice symétrique $H(\hat{x})$ d'ordre (n, n) appelé « matrice Hessienne » et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tq :

$$f(x) = f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}) + \frac{1}{2}(x - \hat{x})' H(\hat{x})(x - \hat{x}) + \|x - \hat{x}\|^2 \alpha(\hat{x}, x - \hat{x}), \quad \forall x \in S,$$

où $\alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \hat{x}$.

La matrice Hessienne du vecteur $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ est donnée par

$$H(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\hat{x}), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\hat{x}) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

Remarque :

Si f est une fonction de classe C^2 (admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues) donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\hat{x}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

et le hessien de f est une matrice symétrique.

Définition :

Soit $H(\hat{x})$ la matrice Hessienne de la fonction f au point \hat{x} , alors

- 1- La matrice $H(\hat{x})$ est dite semi-définie positive (SDP) et on note « $H(\hat{x}) \geq 0$ » ssi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^t H(\hat{x}) x \geq 0$$

Donc, toutes les valeurs propres de la matrice $H(\hat{x})$ sont positives.

- 2- La matrice $H(x)$ est dite définie positive (DP) et on note « $H(\hat{x}) > 0$ » ssi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x^t H(\hat{x}) x > 0$$

Donc, toutes les valeurs propres de la matrice $H(\hat{x})$ sont strictement positives.

Remarque :

- 1- Soit « \mathbf{H} » une matrice définie positive. Alors, il existe une matrice orthonormée « \mathbf{G} » telle que « $\mathbf{G}^t \mathbf{H} \mathbf{G}$ » étant une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de \mathbf{H} , et donc positifs.

- 2- Si la matrice « \mathbf{H} » est définie positive alors elle est inversible car les valeurs propres

$$(\lambda_i, i = 1, \dots, n) \text{ sont strictement positives et comme } \det H = \prod_{i=1}^n \lambda_i \text{ donc } \det H \neq 0$$

Théorème :

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ ouvert convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction réelle deux fois différentiable dans S , alors

- a) La fonction f est convexe dans S si et seulement si la matrice hessienne est semi définie positive (s.d.p) en tout point de S .
- b) La fonction est strictement convexe dans S si et seulement si la matrice hessienne est définie positive (d.p) en tout point de S .

Preuve :

- a) 1-Supposons que f est convexe dans S et montrons que $H(\hat{x})$ semi définie pour tout \hat{x}

La fonction f est convexe sur S si et seulement si

$$\forall \hat{x} \in S; f(\hat{x} + \lambda x) \geq f(\hat{x}) + \lambda (\nabla f(\hat{x}))^t x, \quad \forall x \in S. \quad (1)$$

Et comme la fonction f est deux fois différentiable dans S , alors

$$f(\hat{x} + \lambda x) = f(\hat{x}) + \lambda (\nabla f(\hat{x}))^t x + \frac{1}{2} \lambda^2 x^t H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda x), \quad \forall x \in S, \quad (2)$$

De (1) et (2), on a
$$\frac{1}{2} \lambda^2 x' H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda x) \geq 0,$$

On divise par λ et lorsque $\lambda \rightarrow 0$, on obtient $x' H(\hat{x}) x \geq 0$.

2-Supposons que $H(\hat{x})$ semi définie pour tout \hat{x} et montrons que f est convexe dans S c-à-d montrons que

$$\forall \hat{x} \in S; f(x) \geq f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}), \quad \forall x \in S.$$

En effet, soient x, \hat{x} quelconques de S

$$f(x) = f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})' H(\xi)(x - \hat{x}); \quad \text{où } \xi \in [\hat{x}, x] \text{ donc } \xi = t x + (1-t)\hat{x}, t \in]0,1[$$

$$f(x) - [f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x})] = \frac{1}{2} (x - \hat{x})' H(\xi)(x - \hat{x}) \geq 0; \quad \text{car } H \text{ est s.d.p}$$

D'où la convexité de f .

Exemple :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2.$$

f est-elle convexe ?

On sait que la fonction f est 2 fois différentiable sur \mathbb{R}^3 , et

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow H(x, y, z) \geq 0, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

1) Calculons le gradient

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix}.$$

2) Calculons la matrice hessienne

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0; \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

La matrice hessienne a trois valeurs propres : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 > 0$

Donc, elle est semi définie positive, on conclut que la fonction f est convexe.

Exercices du chapitre 1

Exercice 1 : -----

Les quels parmi les ensembles ci-dessous sont convexes

$$\begin{aligned}
 S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x=0 \text{ et } y \in [0; 1]\} & S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \geq 0, z \geq 0\} \\
 S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x+y=3 \text{ et } 1 \leq x \leq 2\} & S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2-1)^2 + y^2 \leq 4\} \\
 S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y-x^2 \geq 0\} & S &= \left\{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\right\} \\
 S &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\} & S &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 5, 3x_1 + x_2 \leq 6\} \\
 S &= \left\{y \in (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3, y_1 \geq 1, y_2 - 2y_3 = 1\right\}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : -----

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (justifier)

- 1- La somme de deux convexes est un convexe.
- 2- Le produit de deux convexes est un convexe
- 3- Soit $S_i \in \mathbb{R}^n$, ($i=1, \dots, n$), convexe. Alors $(\bigcap_{i=1, n} S_i)$ et $(\bigcup_{i=1, n} S_i)$ est un convexe.
- 4- Soit un ensemble $S \in \mathbb{R}^n$ convexe. Alors \bar{S} convexe.
- 5- Soient un ensemble $S \in \mathbb{R}^n$ convexe et deux réels positifs α, β . Alors : $\alpha S + \beta S = (\alpha + \beta)S$.
- 6- Tout ensemble affine est convexe. La réciproque est vraie.
- 7- Les polyèdres $S = \{x / Ax \leq b\}$ sont des convexes de \mathbb{R}^n où A est une matrice (m.n) est b un vecteur de \mathbb{R}^m .

Exercice 3 : -----

Les fonctions suivantes sont-elles convexes ?

$$\begin{aligned}
 &\bullet f(x) = \|x\| & \bullet f(x) = x^2 & \bullet f(x) = x^\beta, (\beta \in \mathbb{N}) & \bullet f(x) = -\ln x \\
 &\bullet f(x) = e^{-x} & \bullet f(x) = 2x^3 - 3x^2
 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & -3 < x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ +\infty & x \leq -3 \text{ ou } x > 1 \end{cases}, \bullet f(x, y) = \frac{x^2}{y} \text{ sur l'ensemble } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$$

$$\begin{aligned}
 &\bullet f(x) = x^2, S = \{x \in \mathbb{R}, 2x + 5 \leq 0\} \\
 &\bullet f(x, y) = x^2 - 2y^2 - 5xy, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\} \\
 &\bullet f(x, y) = (x-2)^2 + \alpha(y-1)^2, \alpha \in \mathbb{R}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + (y+1)^2 \leq 2\}
 \end{aligned}$$

Exercice 4:-----

- 1- La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ?
- 2- Soient f et g convexes sur intervalle I de \mathbb{R} , que dire de $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$?
- 3- Soit N une norme sur \mathbb{R}^n , et S une partie convexe de \mathbb{R}^n . On définit par

$$d(x, S) = \inf_{y \in S} N(x - y)$$

Montrer que la fonction $x \rightarrow d(x, S)$ est une fonction convexe sur \mathbb{R}^d ?

- 4- Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = |x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3$$

S'agit-il d'une fonction convexe ? Strictement convexe ? Écrire son sous-différentiel.

Exercice 5:-----

Soit C un sous-ensemble ouvert convexe non vide de \mathbb{R}^n et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable sur C . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

1. f est convexe sur C ;
2. Pour tout $x, y \in C$, $f(y) \geq f(x) + (\nabla f(y), y - x)$
3. L'application ∇f est monotone sur C , c'est-à-dire $\forall x, y \in C$, $(\nabla f(y) - \nabla f(x), y - x) \geq 0$.

Montrer que si, de plus, f est deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n , alors

$$f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n, \nabla^2 f(x) \text{ est semi-définie positive}$$

Exercice 6:-----

Soit $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la fonction définie par, $N \times N$ est une matrice A avec $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ symétrique, $b \in \mathbb{R}^N$.

- a- Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^N .
- b- Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f .
- c- Montrer que f est convexe ssi A est semi définie positive.
- d- Montrer que f est strictement convexe ssi A est définie positive.

Exercice 7:-----

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $a \in I$ on définit la fonction : $p_a(f)(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$

- 1- Montrer que f est convexe sur I ssi pour tout $a \in I$, $p_a(f)$ est une fonction croissante sur $I \setminus \{a\}$.
- 2- En déduire que, si f est convexe sur I , pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Montrer aussi que, si $a < b \in \overset{\circ}{I}$, $f'_d(a) \leq p_a(f)(b) \leq f'_g(b)$.

Chapitre II

OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

L'optimisation sans contraintes est une sous-discipline de l'optimisation mathématique, dans laquelle l'ensemble admissible est l'espace tout entier. Ces problèmes sont plus simples à analyser et à résoudre que les problèmes d'optimisation avec contraintes.

II.1. Généralités

L'optimisation a un vocabulaire particulier, pour cela nous allons introduire quelques notations et définitions classiques. Tout d'abord, nous donnons la formulation générale d'un problème d'optimisation, donc on a besoin d' :

-Une fonction objective ou fonction de coût ou critère, à minimiser, noté $f : R^n \rightarrow R$

-Un ensemble $S \subseteq R^n$ où l'on va chercher la solution, on dit que S est l'ensemble des éléments admissibles du problème ou bien l'ensemble des contraintes.

On cherche à minimiser f sur S c'est à dire on cherche x de S tel que :

$$f(x) = \min_{y \in S} f(y) \Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in S$$

Remarque :

Lorsque l'on utilise la notation « inf » pour un problème d'optimisation c'est à-dire "inf $f(x)$ " cela indique que l'on ne sait pas, si la valeur du minimum est atteinte. On utilise de préférence la notation "minf(x)" mais il ne s'agit pas d'une convention universelle. Pour les problèmes de maximisation, les notations "sup et max" remplace "inf et min" respectivement.

L'optimisation se scinde en deux type de problèmes: sans et avec contraintes, dans les deux cas, le but est de trouver les valeurs qui maximisent ou minimisent une fonction.

a-Optimisation sans contrainte

Nous allons étudier le problème d'optimisation sans contraintes où on effectue la minimisation de la fonction $f : R^n \rightarrow R$ sur tout l'espace R^n . Nous considérons donc le problème formulé de la façon suivante :

$$(P) \left\{ \min f(y); y \in R^n \right\}$$

qui peut réécrire sous la forme

$$\left\{ \text{trouver } x \in R^n \text{ tel que } f(x) \leq f(y), \quad \forall y \in R^n \right\}$$

b-Optimisation sous contrainte

Le problème d'optimisation avec contraintes s'écrit sous la forme :

$$(P) \left\{ \min f(y); y \in S \right\}$$

$$\left\{ \text{trouver } x \in S \text{ tel que } f(x) \leq f(y), \forall y \in S \right\}$$

S est l'ensemble des contraintes sous forme d'égalité et d'inégalité telle que pour (p, q) de N

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x \in R^n, \quad g_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, p\} \\ h_j(x) \leq 0; j \in \{1, \dots, q\} \end{array} \right\},$$

tel que:

-La fonction $g(x) = (g_1(x); g_2(x), \dots, g_p(x))$ est une fonction de plusieurs variables x de R^n à valeurs dans R , qui représente les contraintes en égalités.

-La fonction $h(x) = (h_1(x); h_2(x), \dots, h_q(x))$ est une fonction de plusieurs variables x de R^n à valeurs dans R , qui représente les contraintes en inégalités.

Nous noterons ces types de problèmes ainsi :

-**(PCE)** Problème avec contraintes d'égalité.

-**(PCI)** Problème avec contraintes d'inégalité.

Exemple :

1-Quelle est la valeur maximale de la fonction :

$$f(A, B, C) = \sin A \sin B \sin C,$$

sous la contrainte :

$$A + B + C = \pi.$$

C'est un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité.

2-Maximiser la fonction objective

$$f(x_1, x_2) = 1200 x_1 + 1000 x_2$$

sous les contraintes : $3 x_1 + 4 x_2 \leq 160, 6 x_1 + 3 x_2 \leq 180, x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0.$

C'est un problème d'optimisation avec contraintes d'inégalité.

Remarque :

1- Plus généralement, on peut remplacer l'espace R^n par un espace vectoriel topologique sur R de dimension fini.

2- Pour la maximisation, faire la minimisation de la fonction $(-f)$:

$$\max f(x) = -\min f(-x).$$

II.2. Quelques exemples d'optimisation

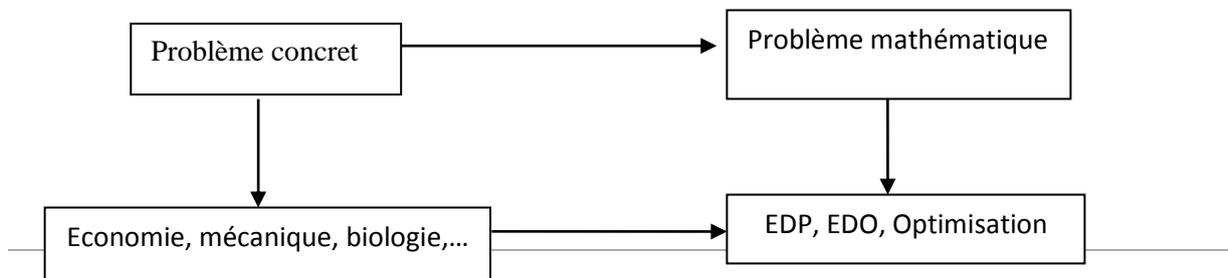
II.2.a : Exemple 1

On veut acheter les aliments au plus bas prix possible qui fourniront les besoins journaliers de calories (au moins 2000) protéines (30 unités) et fibre (20 unités), les aliments disponibles sont la viande (un kilo à un prix de 500 dinars fournit 800 calories, 10 unités de protéines et 2 de fibre) des fruits (200 cal, 6 et 4 unités à prix de 200 dinars) et du riz (100 cal, 5 et 4 unités à un prix de 150 dinars).

Pour répondre à la question, on va donner un modèle mathématique à ce problème.

Modélisation :

Un **modèle mathématique** est une traduction des données du problème dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques.



Dans la modélisation mathématique de problème d'optimisation, on distingue trois étapes :

1. Identification des variables de décisions ; ce sont les paramètres sur lesquels l'utilisateur peut agir pour faire évoluer le système considéré.
2. Définition d'une fonction coût ou fonction permettant d'évaluer l'état du système (ex : rendement, performance,...).
3. Description des contraintes imposées aux variables de décision.

Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer les variables de décision conduisant aux meilleures conditions de fonctionnement du système (ce qui revient à minimiser ou maximiser la fonction coût), tout en respectant les contraintes d'utilisation définies à l'étape 3

Donc ; pour donner le modèle mathématique du problème précédent il faut passer par les trois étapes suivantes :

- Les variables
- La fonction économique (objective)
- Les contraintes

a) Les variables :

Notons par :

x : la quantité de la viande

y : la quantité de fruit

z : la quantité du riz

b) La fonction objective :

Le prix total est : $f(x, y, z) = (500x + 200y + 150z)$

c) Les contraintes :

$$\begin{cases} 800x + 200y + 100z \geq 2000 \\ 10x + 6y + 5z \geq 30 \\ 2x + 4y + 4z \geq 20, \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases},$$

Donc, notre problème est modélisé en un problème mathématique de la façon suivante :

$$(P) \left\{ \min (500x + 200y + 150z); (x, y, z) \in S \right\}$$

tel que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 / 800x + 200y + 100z \geq 2000, 10x + 6y + 5z \geq 30, 2x + 4y + 4z \geq 20\}$

II .2.b. Exemple 2 : Un problème classique du sac à dos

Soit n objets de poids respectifs $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$, et d'utilités respectives $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$, et $P \in \mathbb{R}$ un poids maximal que l'on est disposé à porter. On pose $x_i = 1$ si on met le i -ème objet dans le sac-à-dos, et $x_i = 0$ sinon. On veut maximiser l'utilité du sac-à-dos sous contrainte de poids. Donc, notre problème est modélisé en un problème mathématique de la façon suivante :

$$\max_{x_i \in \{0,1\}} \sum_{1 \leq i \leq n} x_i u_i \text{ sous les contraintes } \sum_{1 \leq i \leq n} x_i p_i \leq P$$

I .2.c. Exemple 3 :

On a besoin d'au moins 60 litres de peinture pour peindre les corridors d'un édifice. Pour effectuer ce travail, on utilise de la peinture blanche et de la peinture bleue. Selon le contremaître, on doit utiliser au plus 2 fois plus de peinture bleue que de peinture blanche. On évalue la surface à peindre à au plus 240 m². Selon le fournisseur de peinture, un litre de peinture blanche couvre 2 m² et coûte 10 d, tandis qu'un litre de peinture bleue couvre 3 m² et coûte 12 d.

Combien de litres de chaque couleur le contremaître doit-il utiliser pour minimiser ses dépenses ?

II. 3. Solution Optimale

Soit $f: R^n \rightarrow R$, On appelle problème d'optimisation sans contraintes, le problème (P) suivant :

$$(P): \left\{ \min f(x), x \in R^n \right\}$$

C'est un problème d'optimisation sans conditions sur les variables. Les minima locaux et globaux de f sur R^n sont définis de la manière suivante :

Définition :

1-On dit que la fonction f du problème (P) possède un minimum global en $\hat{x} \in R^n$ ssi :

$$\forall x \in R^n, f(x) \geq f(\hat{x}).$$

2-On dit que le point $\hat{x} \in R^n$ est un minimum locale du (P) ssi il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ de \hat{x} tel

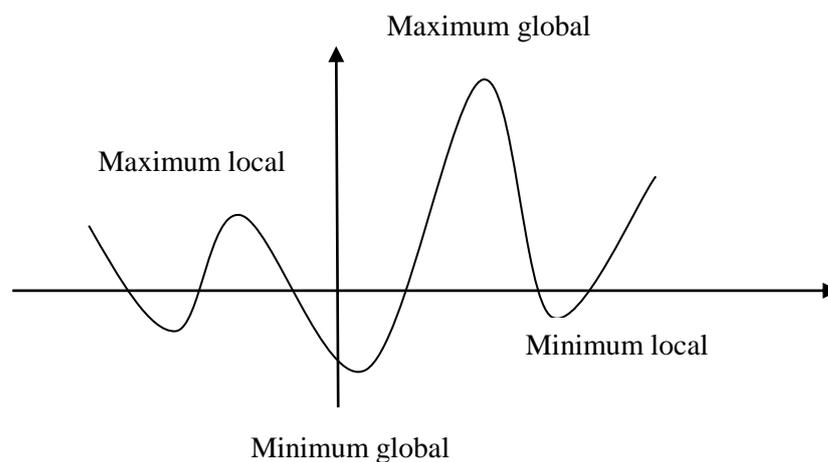
que :

$$\forall x \in V_\varepsilon(\hat{x}), f(x) \geq f(\hat{x}).$$

3-On dit que $\hat{x} \in R^n$ est un minimum local strict de (P) ssi : il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ de \hat{x} tel que :

$$\forall x \in V_\varepsilon(\hat{x}), x \neq \hat{x}, f(x) > f(\hat{x}).$$

4-On dit que $\hat{x} \in R^n$ est un minimum local isolée de (P) s' il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ de \hat{x} tel que \hat{x} est la seule solution optimal de (P).

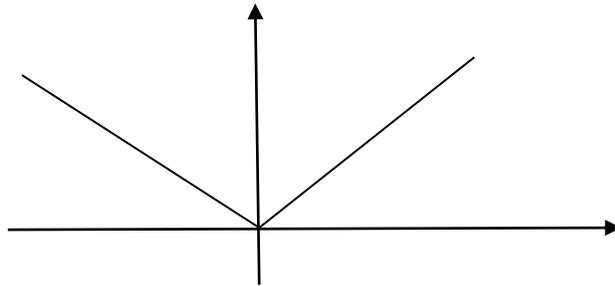


Remarque :

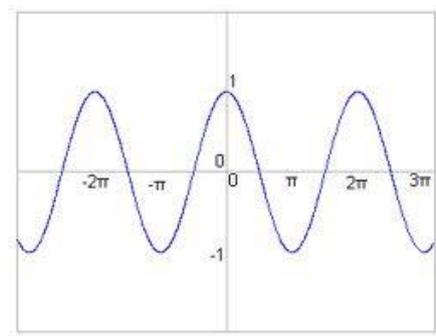
- Un minimum global est clairement un minimum local
- Si on dit simplement minimum on comprend minimum global.
- Toute solution optimale isolée est une solution optimale locale stricte. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Exemples :

- 1- Soit la fonction : $f(x) = Cte, \forall x \in \mathbb{R}$. Tout point x de \mathbb{R} est un minimum local et global mais il n'existe aucune solution stricte ou isolée.
- 2- Soit la fonction : $f(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. Le point $x=0$ est un minimum locale, globale, stricte et aussi isolée.



- 3- Pour la fonction $f(x) = \cos(x)$, il existe une infinité de minima et maxima globaux.



- 4- Pour la fonction $f(x) = x \cos x$, il existe une infinité de minima et maxima locaux mais aucun minimum ou maximum global.

Remarque : Les questions qui nous intéressent dans les problèmes d'optimisation sont les suivantes :

- 1) Existence et unicité de la solution du problème (P).
- 2) Caractérisation des solutions (les points réalisant le minimum)
- 3) Calcul, expression explicite du minimum et algorithmes permettant de l'approcher.

On utilise la plupart du temps des outils de nature différente pour répondre à chacune de ces questions, par exemple le problème de l'existence se résout en général en exploitant les propriétés *topologiques* de l'ensemble S (dans le cas sans contraintes $S=\mathbb{R}^n$) et de la fonction f .

II.4. Résultats d'existence et d'unicité

Avant d'étudier les propriétés de la solution du problème (P), il faut assurer de leur existence. Le théorème le bien connu sur l'existence des minima et des maxima est

Théorème d'existence 1 : (Théorème de Weierstrass)

Soient S un ensemble compact (fermé et borné) non vide de \mathbb{R}^n et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur S , alors f admet au moins un min \hat{x} sur S . Autrement dit, il existe un point \hat{x} de S minimum global de f sur S i.e. :

$$\forall x \in S, f(x) \geq f(\hat{x}).$$

Preuve : Soit (x_n) une suite minimisante de f sur S c'est-à-dire d'éléments de S telle que

$$x_n \in S, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in S} f(x)$$

Comme S est borné, la suite minimisante soit bornée, donc on peut extraire une sous-suite notée (x_n) qui converge vers un élément \hat{x} de S car S est un ensemble fermé. Cette suite extraite vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\hat{x})$$

car f est continue,

d'où par unicité de la limite

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in S} f(x)$$

Donc f réalise son minimum dans S .

Remarque :

- 1- De la même façon, il existe un point de maximum global de f sur S .
- 2- Si la fonction f n'est pas continue alors elle n'admet pas un minimum.
- 3- Une fonction continue sur un fermé borné n'atteint pas toujours son minimum dans un espace de dimension infinie.
- 4- L'existence d'une suite minimisante provient de la définition de l'inf.
- 5- Rappelons qu'un compact S de \mathbb{R}^n est caractérisé par la propriété que toute suite de points de l'ensemble S admet une valeur d'adhérence dans l'ensemble.

Intuitivement, on comprend qu'un fermé borné vérifie une telle propriété : une suite de points de l'ensemble S ne peut pas partir "à l'infini" puisque l'ensemble est borné, elle doit donc s'accumuler quelque part dans \mathbb{R}^n et un point d'accumulation de la suite est nécessairement dans l'ensemble puisque l'ensemble S est fermé.

Dans le cas des problèmes d'optimisation sans contraintes ($S = \mathbb{R}^n$), on va utiliser le théorème suivant

Théorème d'existence 2 :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et coercive (i.e. infini à l'infini : $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$) alors f admet

au moins un minimum sur \mathbb{R}^n . Autrement dit, il existe un point \hat{x} de \mathbb{R}^n minimum global de f sur \mathbb{R}^n

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(\hat{x}).$$

Preuve :

Soit (x_n) une suite minimisante dans \mathbb{R}^n c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

Comme f est coercive, la suite (x_n) ne peut pas partir à l'infini donc elle est bornée et il existe une sous-suite extraite notée (x_n) de \mathbb{R}^n qui converge vers un \hat{x} de \mathbb{R}^n : $x_n \rightarrow \hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Or f est continue, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\hat{x})$$

$$\text{d'où par unicité de la limite} \quad f(\hat{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Donc ; f réalise son minimum dans \mathbb{R}^n .

Théorème d'unicité :

Si de plus $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, alors il existe un unique minimum $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ de f tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq f(\hat{x}).$$

Preuve :

Soit f strictement convexe, supposons qu'il existe $\hat{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ deux min de la fonction f sur \mathbb{R}^n tels que

$$\bar{x} \neq \hat{x} \text{ et } f(\hat{x}) = f(\bar{x}) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Soit $\tilde{x} = \lambda \bar{x} + (1-\lambda)\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\lambda \in (0,1)$ et comme f est strictement convexe

$$f(\tilde{x}) < \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) = f(\hat{x}) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Ceci fournit une contradiction, ce qui est impossible; donc $\hat{x} = \bar{x}$.

Nous pouvons maintenant énoncer un deuxième résultat d'existence et d'unicité

Théorème 2 :

Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on suppose que f est α -elliptique c'est dire qu'il existe $\alpha > 0$ (appelée la constante d'ellipticité) tel que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2.$$

Alors, f est strictement convexe et coercive. En particulier le problème (P) admet une solution unique.

Preuve : Exercice

Il faut maintenant donner des conditions d'optimalités pour pouvoir calculer la (ou les) solutions, mais avant ça, on a besoin de quelques définitions.

II. 5. Direction de descente

Une direction de descente est une direction le long de laquelle la fonction à minimiser a une dérivée directionnelle strictement négative. Ces directions sont utilisées par les méthodes à directions de descente.

Définitions3 :

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et « d » un vecteur de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Le vecteur « d » est dit de descente au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\exists \delta > 0, \forall \lambda \in]0, \delta[, f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}).$$

Théorème :

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f'(\hat{x}, d) = (\nabla f(\hat{x}), d) < 0$$

Alors, « d » est une direction de descente de f en $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Preuve : Soit f une fonction différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, donc

$$f(\hat{x} + \lambda d) = f(\hat{x}) + \lambda \nabla f(\hat{x})' \cdot d + \lambda \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d), \quad \forall \lambda \in S, \text{ où } \alpha(\hat{x}, \lambda d) \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0.$$

Donc
$$\frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})' \cdot d + \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})' \cdot d \Rightarrow f'(\hat{x}, d) = (\nabla f(\hat{x}), d)$$

et comme

$$(\nabla f(\hat{x}), d) < 0 \Rightarrow f'(\hat{x}, d) < 0,$$

donc :

$$\exists \delta > 0, \text{ tq } \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} < 0, \forall \lambda \in]0, \delta[$$

$$\exists \delta > 0, \forall \lambda \in]0, \delta[, f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}).$$

Donc le vecteur « d » est une direction de descente.

Remarques :

- 1- Par définition du gradient, il revient au même de dire que « d » fait avec l'opposé du gradient $(-\nabla f(x))$ un angle θ , appelé **angle de descente**, qui est strictement plus petit que 90° :

$$\theta = \arccos \left[\frac{(-\nabla f(x), d)}{\|\nabla f(x)\| \|d\|} \right] \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

La notion d'angle définie ci-dessus dépend du produit scalaire et n'est pas invariante par rotation des vecteurs. L'ensemble des directions de descente de f en x ,

$$\{d \in \mathbb{R}^n, (\nabla f(x), d) < 0\} \text{ forme un demi-espace ouvert de } \mathbb{R}^n.$$

2- Par définition de la dérivée, on voit que si d est une direction de descente

$$f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}) \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

et donc que f décroît strictement dans la direction « d ». De telles directions sont intéressantes en optimisation car, pour faire décroître f , il suffit de faire un déplacement le long de « d ». Les méthodes à directions de descente utilisent cette idée pour minimiser la fonction f .

II.6. Conditions d'optimalité :CO

Dans cette section, nous allons chercher à obtenir des conditions nécessaires et parfois suffisantes de minimalité. L'objectif est d'une certaine manière beaucoup plus pratique puisque ces conditions d'optimalité seront le plus souvent utilisées pour tenter de calculer un minimum ou le maximum. Ces conditions vont donc s'exprimer à l'aide de la dérivée première ou seconde.

II.6.1. Condition d'optimalité nécessaires du premier ordre :CONI

Les conditions que nous allons donner sont des conditions différentiables qui portent sur la dérivée de la fonction à minimiser.

Théorème :

Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point \hat{x} de \mathbb{R}^n . Si \hat{x} est un optimum local du problème (P), alors

$$\nabla f(\hat{x}) = 0$$

Preuve :

Supposons le contraire c'est-à-dire $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$ donc on a un vecteur $d = -\nabla f(\hat{x})$ qui est une direction de descente i.e

$$\exists \delta > 0, \forall \lambda \in]0, \delta[, f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}).$$

et $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est un optimum local du f donc :

$$\exists V_\varepsilon(\hat{x}), \forall x \in V_\varepsilon(\hat{x}), f(x) \geq f(\hat{x}).$$

Soit $V_\varepsilon(\hat{x})$ un voisinage quelconque de \hat{x} :

$$V_\varepsilon(\hat{x}) \cap [\hat{x}, \hat{x} + \lambda \nabla f(\hat{x})] \neq \emptyset, \lambda \in]0, \delta[\Rightarrow \exists x_\lambda = \hat{x} + \lambda d \in V_\varepsilon(\hat{x}), f(x_\lambda) < f(\hat{x}).$$

Contradiction avec le fait que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est une solution optimale locale du (P).

On conclut que $\nabla f(\hat{x}) = 0$

Remarque :

- 1- La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie.
- 2- Tout point $\hat{x} \in R^n$ vérifiant $\nabla f(\hat{x})=0$ est appelé « point critique » ou « point stationnaire ».
- 3- La relation $\nabla f(\hat{x})=0$ est aussi appelée « équation d'Euler ».
- 4- Ce théorème n'a pas de sens si la fonction f n'est pas différentiable.
- 5- Il faut bien noter que la condition du premier ordre ne fournit qu'une condition nécessaire d'optimalité. Autrement dit, l'application de ce critère fournira en général trop de points parmi lesquels il faudra déterminer la ou les solutions du problème (P) usuellement en comparant les valeurs de la fonction objective f en ces points.
- 6- Si f est convexe, la condition nécessaire du premier ordre est également suffisante pour que $\hat{x} \in R^n$ soit un minimum de f .

Théorème :

Soit $f: R^n \rightarrow R$ une fonction convexe et différentiel au point \hat{x} de R^n . Un point \hat{x} réalise un optimum de f sur R^n si et seulement si

$$\nabla f(\hat{x})=0$$

Preuve : On a vu que la condition est toujours nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

Soit $\hat{x} \in R^n$ tel que $\nabla f(\hat{x})=0$ et comme f est convexe donc

$$\forall x \in R^n, f(x) \geq f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))^t (x - \hat{x}) \Rightarrow f(x) \geq f(\hat{x}),$$

On a donc immédiatement le fait que \hat{x} réalise un minimum de f sur R^n :

Nous donnons maintenant une condition nécessaire permettant de préciser encore les éventuels minima. Cette condition va faire intervenir la dérivée seconde de f .

II.6.2. Condition d'optimalité nécessaires du deuxième ordre CON2

Dans le cas où f est deux fois différentiable, une autre condition nécessaire est donnée par le théorème suivant :

Théorème :

Soit $f: R^n \rightarrow R$ une fonction deux fois différentiable au point $\hat{x} \in R^n$. Si f possède un minimum local en \hat{x} alors :

- 1- $\nabla f(\hat{x})=0$ et
- 2- La matrice Hessienne $H(\hat{x})$ soit semi définie positive

Preuve :

Soit f une fonction deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et d un vecteur de \mathbb{R}^n , donc pour λ assez petit, on a

$$f(\hat{x} + \lambda d) = f(\hat{x}) + \lambda(\nabla f(\hat{x}), d) + \frac{1}{2} \lambda^2 .d' H(\hat{x}).d + \lambda^2 .\|d\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda d), \quad \forall x \in S, \text{ où } \alpha(\hat{x}, \lambda d) \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0.$$

le point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ est le minimum de f c'est-à-dire $\nabla f(\hat{x}) = 0$

donc

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda^2} \geq 0, \forall \lambda \in]0, \delta[$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} d' H(\hat{x}).d + \|d\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda d) \geq 0, \forall \lambda \in]0, \delta[$$

Par passage à la limite lorsque $\lambda \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{2} d' H(\hat{x}).d \geq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n$

Donc, la matrice hessienne $H(\hat{x})$ est semi définie positive.

Remarque :

La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie (pour la fonction $f(x) = x^3$, les conditions d'optimalité du premier et de deuxième ordre sont vérifiées pour $x=0$ mais « 0 » n'est pas un minimum local.

II.6.3. Condition d'optimalité suffisante du deuxième ordre COS2

Les conditions données précédemment sont nécessaires, c'est-à-dire qu'elles doivent être satisfaites pour tout minimum local, cependant, tout vecteur vérifiant ces conditions n'est pas nécessairement un minimum local. Le théorème suivant établit une condition suffisante pour qu'un vecteur soit un minimum local, si f est deux fois continuellement différentiable.

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $\nabla f(\hat{x}) = 0$ et la matrice hessienne $H(\hat{x})$ est définie positive, alors f possède un minimum local en $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

Preuve :

Soit f une fonction deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, donc f s'écrit sous la forme

$$f(x) = f(\hat{x}) + (\nabla f(\hat{x}))'(x - \hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})' H(\hat{x})(x - \hat{x}) + \|x - \hat{x}\|^2 \alpha(\hat{x}, x - \hat{x}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \hat{x}$.

Supposons que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ n'est pas un min local stricte c'est-à-dire $\forall V_\varepsilon(\hat{x}), \exists x_k \in V_\varepsilon(\hat{x}), f(x_k) \leq f(\hat{x})$.

Notons
$$d_k = \frac{x_k - \hat{x}}{\|x_k - \hat{x}\|}, \text{ donc } \|d_k\|^2 = 1,$$

d'après le théorème de Bolzano Weierstrass

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, d_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \tilde{d}, k \in N_1$$

donc

$$f(x_k) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(x_k - \hat{x})^t H(\hat{x})(x_k - \hat{x}) + \|x_k - \hat{x}\|^2 \alpha(\hat{x}, x_k - \hat{x}),$$

$$\frac{f(x_k) - f(\hat{x})}{\|x_k - \hat{x}\|^2} = \frac{1}{2} d_k^t H(\hat{x}) d_k + \alpha(\hat{x}, \lambda d)$$

Or $f(x_k) \leq f(\hat{x}) \Rightarrow f(x_k) - f(\hat{x}) \leq 0,$

donc $\forall k, \frac{1}{2} d_k^t H(\hat{x}) d_k + \alpha(\hat{x}, x_k - \hat{x}) \leq 0,$

passant à la limite $k \rightarrow +\infty \Rightarrow \tilde{d}^t H(\hat{x}) \tilde{d} \leq 0, \tilde{d} \neq 0$ car $d_k \rightarrow \hat{d}$ et $\|d_k\| = 1$

Donc, la matrice hessienne $H(\hat{x})$ n'est pas définie positive.

Exemple :

Considérons la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 6x_1^2 + x_2^3 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$$

Nous allons identifier tous les points critique de cette fonction, et allons utiliser la première condition d'optimalité afin de déterminer leur nature (min, max, ou ni min ni max). La fonction f est différentiable, alors

Etape 1 : Identification des points critiques :

La fonction f est différentiable et son gradient est: $\nabla f(x) = (12x_1 + 6x_2, 3x_2^2 + 6x_1 + 6x_2)$

La condition nécessaire de premier ordre : $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)$ nous permet d'identifier deux points critique :

$$x = (0, 0)^t \quad \text{et} \quad x = (1/2, -1)^t$$

Etape 2 : Nature des points critiques

La matrice hessienne de cette fonction est

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 6x_2 + 6 \end{pmatrix}$$

Les conditions de deuxième ordre nous permettent de classer ces points critiques

- Pour $x = (0, 0)^t$ on a $\det H(0, 0) = 36 > 0$ et ses valeurs propres sont positives.

La matrice hessienne est alors définie positive, et donc $x = (0, 0)^t$ est un minimum local.

- pour $x = ((1/2), -1)^t$ don $\det H((1/2), -1) = -36 < 0$.

La matrice hessienne n'est pas semi-définie positive, et donc $x = ((1/2), -1)^t$ n'est pas un minimum local.

Remarques :

Si $\nabla f(x) = 0$ et la matrice hessienne $H(x)$ est indéfinie (n'est ni semi-définie positive, ni définie positive, ni semi-définie négative, ni définie négative). Alors, le point x est appelé **point selle**.

Optimisation classique sans contrainte

On considère ici des fonctions f définies dans \mathbb{R} (une fonction d'une variable réelle). Si la fonction f et sa dérivée f' sont continues en un point x où la croissante de la fonction devient décroissante, alors elle possède un maximum. Le raisonnement contraire est valable pour un minimum.

Il existe deux critères pour déterminer si un point candidat (le point qui annule la première dérivée de f) est un point extrémum (minimum ou maximum).

1-Premier critère est:

-Si le signe de la dérivée est positif puis devient négatif quand x croît, alors le point candidat est un maximum de la fonction.

-Si le signe de la dérivée est négatif puis devient positif quand x croît, alors le point candidat est un minimum de la fonction.

2-Deuxième critère :

fait appel à la dérivée seconde de la fonction $f(x)$. Soit $P(x_0; f(x_0))$ le point en lequel $f'(x_0) = 0$. Alors si en ce point:

1- $f''(x_0) < 0$, il s'agit d'un maximum.

2- $f''(x_0) > 0$, il s'agit d'un minimum.

Exemple : Soit la fonction $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

f est dérivable sur \mathbb{R} , Calculons sa première et sa deuxième dérivée

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1).$$

On obtient les points candidats de la fonction f en résolvant l'équation

$$f'(x) = 0 \text{ donc } 3x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 2,$$

et les valeurs correspondantes de y sont $y_1 = 5$ et $y_2 = 1$.

Déterminons la nature des points candidats en utilisant le résultat précédent

$$f''(0) = -6 < 0 \text{ et } f''(2) = 6 > 0.$$

La fonction a donc un maximum en $x_1 = 0$ et un minimum en $x_2 = 2$. Les coordonnées du maximum sont $(0; 5)$ et celles du minimum $(2; 1)$.

Par conséquent, dans un voisinage convenablement choisi du point $x_1 = 0$, la valeur de la fonction est plus petite que $f(x)$. On dit que la fonction possède un maximum local ou relatif au point $x_1 = 0$. Au point $x_2 = 2$, on dit que la fonction possède un minimum local ou relatif. Ces deux valeurs, maximum et minimum, sont appelées des extrémums locaux ou relatifs.

Exercices du chapitre 2

Exercice 1 : -----

Déterminer les minima et les maxima, s'ils existent, de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par

- 1- $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2$, ($a, b \in \mathbb{R}$), 2- $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1 x_2 + x_2^2$
 3- $f(x, y) = x/(1+x^2+y^2)$, 4- $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$

Exercice 2 :-----

Dans le théorème d'existence du minimum (sans contraintes) d'une fonction f , montrer que l'on peut remplacer la propriété « infinie à l'infini » par la condition plus faible

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} (\inf_{\|x\| \geq r} f(x)), \quad r > 0$$

Exercice 3 :-----

Soit f une fonction C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , et (P) est le problème $\{ \min f(x), x \in \mathbb{R}^n \}$, on suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2$ (on dit que f est α -elliptique)

- 1- Montrer que : $f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x), y - x) + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
 2- Montrer que f est strictement convexe et coercive.
 3- Dédurre que le problème (P) admet une solution unique.
 4- On suppose que f est deux fois différentiable en tous points de \mathbb{R}^n , montrer que f est α -elliptique ssi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(D^2 f(x).y, y) \geq \alpha \|y\|^2$

Exercice 4 :-----

Soient u et v deux vecteurs non de \mathbb{R}^2 . On considère la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \|xu + yv\|$$

Montrer que g est minorée par un réel strictement positif m sur l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$

En déduire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geq m\sqrt{x^2 + y^2}$

2. Soit (p_1, \dots, p_k) une suite de k points de \mathbb{R}^2 avec $k > 2$. On pose $p_i = (\alpha_i, \beta_i)$ et on suppose que la suite (α_i) est strictement croissante. On considère alors la fonction f de \mathbb{R}^2 telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^k (\beta_i - x\alpha_i - y)^2$$

-Montrer que f est coercive. En déduire qu'il existe $(x_0; y_0)$ dans \mathbb{R}^2 tel que : $f(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$

3. Calculer un tel $(x_0; y_0)$ et montrer qu'il est unique.

Exercice 5 : -----

- 1- Soient $p_1 = 52$, $p_2 = 44$ les prix respectifs de deux produits. Soient q_1 , q_2 les quantités respectives de ces produits. La fonction coût est $C = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2$.
Trouver les quantités q_1 , q_2 maximisant le bénéfice.
- 2- Un fabricant de postes de télévision produit q postes par semaine à un coût total : $C = 6q^2 + 80q + 5000$. C'est un monopoleur et son prix s'exprime par la relation $P = 1080 - 4q$.
Montrons que le bénéfice net maximum est atteint lorsque la production est de 50 postes par semaine.

Exercice 6 : -----

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^3 par : $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2x - 10y$

1. Montrer que f est coercive sur \mathbb{R}^3 . Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les points où f est minimale sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 7: -----

On considère le problème suivant : Trouver $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|Bu - C\| = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} \|Bv - C\|$ (1)

où B est une matrice réelle de taille $m * n$, $c \in \mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^m .

Dans la suite on note aussi par (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

- 1- Montrer que (1) admet toujours au moins une solution.
- 2- Montrer que cette solution est unique si et seulement si B est injective. Quelle est la Condition nécessaire sur m et n pour que B soit injective ?
- 3- Montrer que le problème (1) est équivalent au problème (2) ci-dessous :

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} f(v) \quad (2)$$

où on a posé $f(v) = 1/2 (B^t Bv, v) - (B^t c, v)$.
- 4- La fonction f est-elle différentiable ?
- 5- Si cela est possible, calculer le gradient et la hessienne de f .
- 6- Donner la condition d'optimalité au premier ordre pour le problème (2).
Cette condition est-elle suffisante ici pour obtenir un minimum ?
- 7- Dans le cas où B est de rang n , montrer que f est strictement convexe. Que peut-on alors conclure ?

Exercice 8: -----

On considère la fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} définie par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1. Montrer que la fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.
2. Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.
3. Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur \mathbb{R}^n . Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Exercice 09 :-----

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz - 3x - 4y - z + 4$

- 1- Mettre f sous la forme d'une fonction quadratique

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) + c \quad \text{avec } A \text{ est une matrice symétrique, } b \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}.$$

- 2- Soient λ_{\min} et λ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de A . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2,$$

- 3- Montrer que si A est définie positive alors $f \ll$ infinie à l'infini » et admet un minimum unique sur \mathbb{R}^3
- 4- En déduire que si A est non positive alors f n'admet pas de minimum sur \mathbb{R}^3

Exercice 10:-----

On se propose d'approcher un nuage de points donnés par les couples de réels $(t_i, x_i), i=1, \dots, N$ par une parabole d'équation $x(t) = at^2 + bt + c$ ou (a, b, c) sont trois réels à déterminer.

- 1- Exprimer le problème ci-dessus sous forme de problème de minimisation.
- 2- Ce problème de minimisation a-t-il une solution ? est-elle unique ?
- 3- Ecrire la condition d'optimalité permettant de trouver le minimum

Exercice 11:-----

A- On considère la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive et strictement convexe sur \mathbb{R}^2 .
2. En déduire que g possède un unique minimum sur \mathbb{R}^2 .
3. Donner la condition d'optimalité.

Exercice 12:-----

I- Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 1} - x + 3$$

1. Montrer que f admet un minimum sur \mathbb{R} et Déterminer les points critiques de f .
3. Parmi les points critiques, lesquels correspondent à des minima ?

II- Soient p et q deux réels strictement positifs tels que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de

la fonction logarithme, montrer que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Chapitre III

METHODES ITERATIVES d'OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Ce chapitre introduit une classe importante d'algorithmes de résolution des problèmes d'optimisation sans contrainte. Le concept central est celui de la direction de descente.

Après avoir décrit le fonctionnement d'un algorithme à directions de descente, nous donnons quelques exemples d'algorithmes de ce type, nous énonçons des critères qui permettent d'estimer la qualité de la direction de descente proche d'une solution : celui de l'admissibilité, du pas unité et celui de la convergence super-linéaire.

III.1. Notion d'algorithme

Considérons le problème consistant à minimiser une fonction $f(x)$ où x de \mathbb{R}^n , un algorithme itératif permettant de résoudre ce problème est un processus itératif générant une suite de vecteur (x_0, x_1, \dots, x_n) de \mathbb{R}^n en fonction d'une séquence d'instructions et d'une condition d'arrêt, c à d qu'à partir d'un point initial x_0 , on engendre (construit) une suite (x_n) qui converge vers la solution du problème

$$(P) : \left\{ \min f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Un algorithme est définie par l'application h de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , qui à chaque point x_k fait correspondre à $x_{k+1} = h(x_k)$. L'étude de la convergence revient à l'étude des propriétés de l'application h .

III.2. Modes de Convergence

Nous dirons qu'un algorithme décrit par une application h est globalement convergent si : quelque soit le point x_0 choisi, la suite (x_k) engendrée par : $x_{k+1} = h(x_k)$ converge vers un point \hat{x} satisfaisant les conditions d'optimalité ($\nabla f(\hat{x}) = 0$ et $H(\hat{x})$ est s.d.p). On a plusieurs modes de convergence :

a. La suite (x_k) converge vers \hat{x} linéairement avec un taux $\alpha < 1$ si : $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|} = \alpha$

b. La convergence est dite asymptotique si $\|x_{k+1} - \hat{x}\| \cong \alpha \|x_k - \hat{x}\|$

c. La convergence est dite super-linéaire si : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|} = 0$.

d. La convergence est dite super-linéaire d'ordre $\gamma > 1$ si : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|^\gamma} < +\infty$.

Si $\gamma = 2$ la convergence de l'algorithme est dite quadratique

III.3. Schémas général des algorithmes d'optimalité

Il convient de souligner que la plupart des algorithmes d'optimisation, avec contrainte ou non, fonctionnent selon un schéma général consistant, à chaque itération, à se rapprocher du minimum par la résolution d'un sous problème de minimisation.

Les méthodes (ou les algorithmes) itératives d'optimalité fait partie d'une classe plus grande de méthodes numériques appelées *méthodes de descente*.

Un algorithme à directions de descente est un algorithme d'optimisation différentiable, destiné à minimiser une fonction réelle différentiable définie sur un espace euclidien (par exemple \mathbb{R}^n , muni d'un produit scalaire) ou, plus généralement, sur un espace hilbertien. L'algorithme est itératif et procède donc par améliorations successives. Au point courant, un déplacement est effectué le long d'une direction de descente, de manière à faire décroître la fonction.

Principe de cette méthode : On veut minimiser une fonction f . Pour cela on se donne un point de départ arbitraire x_0 , pour construire l'itéré suivant x_1 il faut penser qu'on veut se rapprocher du min de f , on veut donc que $f(x_1) < f(x_0)$. On cherche alors x_1 sous la forme : $x_1 = x_0 + \rho_0 d_0$ où d_0 est un vecteur non nul de \mathbb{R}^n et ρ_0 un réel strictement positif, donc on cherche ρ_0 et d_0 pour que $f(x_0 + \rho_0 d_0) < f(x_0)$. On ne peut pas toujours trouver d_0 . Quand d_0 existe on dit que c'est une direction de descente et ρ_0 est le pas de descente, cette opération de détermination du pas s'appelle la recherche linéaire. La direction et le pas de descente peuvent être fixes ou changer à chaque itération. Le schéma général d'une méthode de descente est le suivant :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné} \\ x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \quad d_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \rho_k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où ρ_k et d_k sont choisis de telle sorte que : $f(x_k + \rho_k d_k) < f(x_k)$.

Une idée pour trouver une direction descente est de faire un développement de Taylor à l'ordre 2 de la fonction f entre deux itérés x_k et $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$

$$f(x_k + \rho_k d_k) = f(x_k) + \rho_k (\nabla f(x_k), d_k) + O(\rho_k d_k)$$

Comme on veut $f(x_k + \rho_k d_k) < f(x_k)$, on peut choisir, par exemple :

- 1- $d_k = -\nabla f(x_k)$: la méthode obtenue s'appelle L'**algorithme du Gradient**.
- 2- $d_k = -[H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$: la méthode obtenue s'appelle L'**algorithme de Newton**

III. 4. Méthode de Gradient

L'algorithme du gradient désigne un algorithme d'optimisation différentiable. L'algorithme est itératif et procède donc par améliorations successives. Au point courant, un déplacement est effectué dans la direction opposée au gradient, de manière à faire décroître la fonction. Cette description montre que l'algorithme fait partie de la famille des algorithmes à directions de descente.

L'algorithme du gradient est également connu sous le nom d'algorithme de la plus forte pente ou de la plus profonde descente (steepest descent, en anglais) parce que le gradient est la pente de la fonction linéarisée au point courant et est donc, localement, sa plus forte pente (une notion qui dépend du produit scalaire).

La direction de descente choisie sera à chaque itération

$$d_k = -\nabla f(x_k),$$

les points sont ainsi successivement générés par cette méthode de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in R^n \text{ donné} \\ x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k), \quad \rho_k > 0 \end{cases}$$

L'algorithme de Gradient est donné par :

1. **Initialisation** $K=0$

choix de x_0 , $\rho_0 > 0$ et ε

2. **Itération** k

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$$

3. **Critère d'arrêt**

si $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ ou si $\|\nabla f(x_k)\| < \varepsilon$ stop

Sinon, on pose $k=k+1$, et on retourne à 2.

avec ε est un réel positif (petit) donné qui représente la précision désirée (la valeur que nous devons fixer pour ε dépend du problème considéré).

III.4.1. Méthode de Gradient à pas optimal

Cette méthode consiste à faire les itérations suivantes :

$$\begin{cases} d_k = -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k, \quad \rho_k > 0 \end{cases}$$

où ρ_k est choisi par le règle de minimisation, il consiste à choisir, à chaque itération ρ_k comme étant la solution optimal du problème de minimisation monodimensionnelle de f le long de la demi-droite définie par le point x_k et la direction d_k . Donc, ρ_k est choisi de manière à ce que :

$$f(x_k + \rho_k d_k) < f(x_k + \rho d_k), \quad \forall \rho > 0,$$

dans ce cas les directions de descente d_k générées vérifient : $d_{k+1}^t \cdot d_k = 0$ car si on introduit la fonction

$$g(\rho) = f(x_k + \rho d_k),$$

on a

$$g'(\rho) = \nabla f(x_k + \rho d_k)^t \cdot d_k,$$

et puisque g est dérivable on a nécessairement $g'(\rho_k) = 0$ donc :

$$\nabla f(x_k + \rho_k d_k)^t \cdot d_k = \nabla f(x_{k+1})^t \cdot d_k = -d_{k+1}^t \cdot d_k = 0.$$

Cette opération de détermination du pas s'appelle **la recherche linéaire**.

Remarque :

- 1- La méthode de gradient à pas optimal propose un choix du pas qui rend la fonction de coût minimale le long de la direction de descente choisie, Plus précisément le calcul de $x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$.
- 2- Deux directions de descente successives calculées par l'algorithme de plus profonde descente (gradient) sont orthogonales ce qui traduisant les **zig-zags** des itérés.

Exemple :

Soit la fonction quadratique suivante: $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$ avec $A > 0$ (c'est-à-dire A est une matrice définie positive), on note $g(\rho) = f(x_k + \rho d_k)$, où le optimal ρ_k est caractérisé par $g'(\rho_k) = 0$, on a donc

$$\nabla f(x_k + \rho_k d_k)^t \cdot d_k = (A(x_k + \rho_k d_k) - b)^t \cdot d_k = 0$$

Soit
$$\nabla f(x_k + \rho_k d_k)^t \cdot d_k = 0 \Rightarrow \rho_k = -\frac{(\nabla f(x_k))^t \cdot d_k}{d_k^t \cdot A d_k} > 0$$

car d_k est une direction de descente et $d_k^t \cdot A d_k > 0$.

La méthode du gradient à pas optimal peut s'écrire : $x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$ avec
$$\begin{cases} d_k = b - Ax_k \\ \rho_k = \frac{d_k^t \cdot d_k}{d_k^t \cdot A} \end{cases}$$

Théorème de Convergence :

Soit f une fonction $C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, coercive et strictement convexe. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

Alors, si on choisit le pas ρ_k dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ tel que $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2}{M}$, la méthode du gradient converge vers le minimum de f .

Preuve :

La fonction f admet un minimum \hat{x} unique sur \mathbb{R}^n caractérisé par $\nabla f(\hat{x}) = 0$ puisque f est strictement convexe. Montrons que la suite (x_k) engendrée par l'algorithme converge vers \hat{x} , on a :

$$f(y) = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x), y - x) dt$$

On applique cette relation à $y = x_{k+1}$, $x = x_k$

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + (\nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k) + \int_0^1 (\nabla f(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k) dt$$

Comme $x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$, on obtient

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq -\frac{1}{\rho_k} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \int_0^1 \|\nabla f(x_k + t(x_{k+1} - x_k)) - \nabla f(x_k)\| \|x_{k+1} - x_k\| dt$$

$$\leq -\frac{1}{\rho_k} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \frac{M}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 = \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{\rho_k} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2.$$

Si on choisit ρ_k dans un intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ tq $0 < \beta_1 < \beta_2 < \frac{2}{M}$, nous obtenons alors

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \left(\frac{M}{2} - \frac{1}{\beta_2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

La suite $f(x_k)$ est alors strictement décroissante, comme elle est minorée car

$$f(x_k) \geq f(\hat{x}), \quad \forall k$$

elle est convergente. Cela entraîne d'une part que $(f(x_{k+1}) - f(x_k))$ tend vers « 0 » et d'autre part, la suite (x_k) est bornée (car f est coercive). On peut donc extraire une sous-suite convergente vers \bar{x} . De plus, comme

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \left(\frac{1}{\beta_2} - \frac{M}{2} \right)^{-1} \cdot f(x_{k+1}) - f(x_k)$$

La suite $(x_{k+1} - x_k)$ tend également vers 0.

Par conséquent

$$\nabla f(x_k) = \frac{x_{k+1} - x_k}{\rho_k} \rightarrow 0$$

Par continuité de $\nabla f(\bar{x}) = 0$, donc \bar{x} est l'unique minimum \hat{x} de f . Ceci étant vrai pour toute valeur d'adhérence de la suite (x_k) cela prouve que toute la suite (x_k) converge vers \hat{x} .

III.4.2. Méthode de Gradient à pas fixe

On peut utiliser un pas fixé a priori $\rho > 0$, $\forall k$ on obtient alors la méthode de gradient simple :

$$\begin{cases} d_k = -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + \rho d_k \end{cases}$$

Pour $f \in C^1$, cette méthode converge si ρ est choisi assez petit.

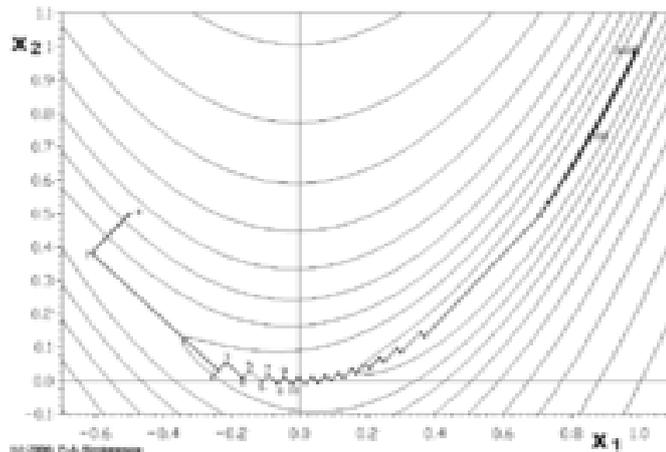
Le choix de pas :

- Un pas « bien choisi » donne des résultats à ceux obtenus par la plus profonde descente.
- Un pas plus petit atténue les zigzags des itérés mais augmente significativement le nombre d'itérations.
- Un pas trop grand fait diverger la méthode.

Inconvénient de la méthode de Gradient :

L'algorithme du gradient peut rencontrer un certain nombre de problèmes, en particulier celui de la convergence lorsque le minimum de la fonction se trouve au fond d'une vallée étroite (plus précisément lorsque le conditionnement de la matrice hessienne est élevée). Dans un tel cas, la suite des $\{x_k\}$ oscille de part et d'autre de la vallée et progresse laborieusement, même lorsque les ρ_k sont choisis de sorte à minimiser $f(x)$.

La figure ci-dessous illustre ce type de comportement pour une fonction à 2 dimensions.



Les points faibles de l'algorithme du gradient sont :

- L'algorithme peut nécessiter de nombreuses itérations pour converger vers un minimum local, notamment si la courbure est très différente dans des directions différentes.
- La recherche du pas ρ optimal, généralement effectuée par une recherche linéaire, peut se révéler très longue. Inversement, utiliser un pas ρ fixe peut conduire à de mauvais résultats.
- L'inconvénient majeur de cette méthode survient lorsque la direction du gradient y est presque orthogonale à la direction menant au minimum. Celle-ci adopte alors le comportement bien connu du « zig-zag » et progresse extrêmement lentement.
- Cette méthode a pour avantage d'être très facile à mettre en œuvre. Malheureusement les conditions de convergence sont assez lourdes (c'est essentiellement de la stricte convexité) et la méthode est en général assez lente.
- Pour construire les méthodes de gradient, nous avons remplacé f par son approximation linéaire au voisinage de l'itéré courant. Nous avons vu que ces méthodes ne sont pas très performantes, en partie parce qu'elles ne tiennent pas compte de la courbure (ou de la Hessienne) qui est une information de second ordre.

Exemple :

Comparaison de la vitesse de l'algorithme de gradient à pas fixe et à pas optimal pour la résolution du Problème :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x)$$

avec A est une matrice symétrique carré ($n.n$) et b est un vecteur de \mathbb{R}^n . Ce problème équivaut à la résolution du système $Ax=b$

On a choisi $A = \text{diag}([1 : 1 : 100])$, $x_{\text{sol}} = \text{ones}(N, 1)$ et $x_0 = \text{rand}(N, 1)$.

//Gradient a pas optimal pour problème quadratique

```
clear
clf
N=100;
//A=2*diag(ones(N,1),0)-diag(ones(N-1,1),-1)-diag(ones(N-1,1),1);
A=diag([1:1:N]);
xsol=ones(N,1);
b=A*xsol;
x0=rand(N,1);
itermax=100;
```

//1.Gradient pas fixe

```
x=x0;
Tfixe=[norm(x-xsol,'inf')];
mu=0.01;
for k=1:itermax
d=A*x-b;
x=x-mu*d;
err=norm(x-xsol,'inf');
Tfixe=[Tfixe err];
end
```

//2.Gradient pas optimal

```
x=x0;
Topt=[norm(x-xsol,'inf')];
for k=1:itermax
d=A*x-b;
mu=d'*d/(d'*A*d);
x=x-mu*d;
err=norm(x-xsol,'inf');
Topt=[Topt err];
end
```

```
plot2d([0:1:itermax],[Tfixe Topt],logflag='nl',style=[1 2]);
xlabel('k','|xk-x|')
legends(['pas fixe';'pas optimal'],[1 2],opt='ll')
```

III. 5. Méthode des gradients conjugués

La méthode du gradient conjugué est un algorithme pour résoudre des systèmes d'équations linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Cette méthode, imaginée en 1950 simultanément par Cornelius Lanczos et Magnus Hestenes, est une méthode itérative qui converge en un nombre fini d'itérations (au plus égal à la dimension du système linéaire).

Principe de la méthode

On considère f une fonction quadratique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} : $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$ où A est une matrice symétrique définie positive (n, n), b est un vecteur de \mathbb{R}^n

L'idée est de reprendre la méthode de plus forte pente (i.e. la méthode de Gradient) mais d'éviter les "mauvaises" directions de descente trouvées précédemment qui faisaient "rebondir" le chemin de descente sur les parois de f . Pour éviter les zigzags et accélérer la convergence, on cherche des directions de descente « d_i » mutuellement conjuguées par rapport « A » pour prendre en compte la géométrie de la fonction f .

Directions conjuguées

Définition :

1- On dit que deux directions x et y de \mathbb{R}^n sont conjuguées par rapport à la matrice « A » si $x^t \cdot A y = 0$.

2- Si la matrice « A » est symétrique et définie positive, on déduit un produit scalaire :

$$(x, y)_A = (Ax, y) = (x, Ay) = x^t Ay.$$

3- Des vecteurs d_1, d_2, \dots, d_k de \mathbb{R}^n sont dits A -conjugués si pour tous $i \neq j$, on a :

$$(d_i; d_j)_A = 0$$

Remarque :

1- Les vecteurs x et y sont conjugués par rapport A s'ils sont orthogonaux pour ce produit scalaire de A , donc la notion de conjugaison équivaut à la notion d'orthogonalité pour le produit scalaire associé à la matrice A

2- La conjugaison est une relation symétrique.

3- (d_k) est une suite de « n » directions conjuguée deux à deux, forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , donc

$$d_k^t A \hat{x} = d_k^t b = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_k^t A d_i = \alpha_k d_k^t A d_k \Rightarrow \alpha_k = \frac{d_k^t b}{d_k^t A d_k} = \frac{(d_k, b)}{(d_k, d_k)_A} = \frac{(d_k, b)}{\|d_k\|_A^2}$$

$$\forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \hat{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i d_i \Rightarrow A \hat{x} = b = \sum_{i=1}^n \alpha_i A d_i$$

Donc l'idée de la méthode de gradient conjuguée est de

- a- Trouver une suite de n-directions conjuguée et
- b- Calculer le coefficient α_i .

Théorème :

Soient d_1, d_2, \dots, d_k un ensemble de vecteurs non nuls de \mathbb{R}^n , A-conjugués. Alors les vecteurs d_1, d_2, \dots, d_k sont linéairement indépendants.

Preuve :

C'est une conséquence immédiate du résultat bien connu : si des vecteurs non nuls sont orthogonaux par rapport à un produit scalaire, alors ils sont indépendants

Méthode des directions conjuguées

L'idée est que si on arrive à définir un algorithme itératif utilisant n-directions conjuguées, alors on aura parcouru tout l'espace \mathbb{R}^n dans toutes les directions possibles (ce qui n'était pas le cas pour l'algorithme de plus profonde descente).

Étant donné un point initial x_0 de \mathbb{R}^n et n-directions A-conjuguées d_1, d_2, \dots, d_k on définit le schéma suivant :

$$x_{k+1} = x_k + \rho_k d_k$$

où ρ_k est le scalaire minimisant $f(x)$ selon la direction $x_k + \rho_k d_k$ et qui est défini par

$$\rho_k = -\frac{r_k^t \cdot d_k}{d_k^t \cdot A d_k}$$

et

$$r_k = -\nabla f(x_k) = b - A x_k$$

L'algorithme ci-dessous résout $Ax = b$, où A est une matrice réelle, symétrique, et définie positive. Le vecteur d'entrée x_0 peut être une approximation de la solution initiale ou 0.

Algorithme de la méthode de Gradient Conjuguée**1. Initialisation** $k=0$,

Choix de x_0 dans \mathbb{R}^n ; $r_0 = b - Ax_0$; $p_0 = r_0$

2. Itération k

$$\alpha_k = \frac{r_k^t r_k}{p_k^t A p_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$$

3. Critère d'arrêt

Si r_{k+1} est suffisamment petit, alors on sort de la boucle

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^t r_{k+1}}{r_k^t r_k} \quad p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

Sinon, on pose $k = k + 1$, et on retourne à 2.

Propriétés :

- $\forall i \neq j; d_i^t A d_j = 0$: les directions de descentes sont toutes mutuellement conjuguées.
- L'algorithme des gradients conjugués converge en au plus 'n' itérations.
- On va noter pour tout $k \in N$, $G_k = L(\nabla f(x_0), \dots, \nabla f(x_k)) \subset \mathbb{R}^n$ avec $d_i = -\nabla f(x_i)$. La méthode des

gradients conjugués consiste à chercher $x_{k+1} \in x_k + G_k$ tel que : $f(x_{k+1}) = \min_{y \in x_k + G_k} f(y)$

(en supposant qu'un tel minimum existe). Donc, on minimise la fonction f sur un espace plus "grand" que dans la méthode de gradient à pas optimal où on minimise f sur $x_{k+1} \in x_k + G_k$ avec

$$G_k = L(\nabla f(x_k))$$

Remarque :

- Si A a seulement « r » valeurs propres distinctes (avec $r < n$), alors l'algorithme du gradient conjugué arrive à la solution en au plus r -itérations.
- Si A a des valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, nous avons que

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\|_A^2 \leq \left(\frac{\lambda_{n-k} - \lambda_1}{\lambda_{n-k} + \lambda_1} \right)^2 \|x_0 - \hat{x}\|_A^2$$

- 3- Une caractéristique de l'algorithme de gradients conjugués est que la matrice A ne nécessite aucune manipulation : pas besoin donc de stocker la matrice A , il suffit d'implémenter (efficacement) les produits matrice-vecteur sans jamais former la matrice.

De plus cet algorithme est surtout utilisé pour résoudre des systèmes linéaires de la forme : $Ax = b$ (ce qui correspond à la recherche de points critiques pour le problème quadratique considéré) sans former la matrice A . Ceci est particulièrement intéressant pour les problèmes de grande taille pour lesquels la matrice A est souvent creuse. A noter également, que la méthode des gradients conjugués est une méthode dans laquelle les erreurs d'arrondis sont amplifiées au cours des itérations. Peu à peu, les relations de conjugaison sont perdues car les relations d'orthogonalité des gradients ne sont pas vérifiées exactement.

Théorème :

Si $f : R^n \rightarrow R$ est quadratique et elliptique la méthode de gradient conjugué converge en n -itérations au plus où n est l'ordre de A .

Remarque

Cette méthode est très stable même pour des matrices mal conditionnées. Elle demande $2n^3$ opérations dans le cas d'une matrice pleine et de n itérations pour une matrice creuse, le nombre d'opérations diminue beaucoup.

III.6. Méthode de Newton

La méthode de Newton est attribuée au mathématicien, physicien et astronome anglais *Issac Newton* (1642-1727). C'est l'un des méthodes les plus anciennes utilisées pour résoudre les problèmes d'optimisation.

Cette méthode permettant de trouver une solution d'un système (en général non linéaire) de n équations avec n inconnues, autrement dit de trouver les zéros d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (dans le cas évoqué, on a $F = \nabla f$), i.e. résoudre l'équation non linéaire $F(x) = 0$ dans \mathbb{R}^n .

Dans le cas $n = 1$, cette méthode de Newton s'appelle également la méthode de la tangente.

L'idée est de remplacer le point x_k obtenu à l'itération k , par le point d'intersection de la tangente en $(x_k; f(x_k))$ à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

Considérons maintenant le cas général, i.e. on dispose d'une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe (au moins) C^1 telle que l'équation $\nabla F(x) = 0$ admette au moins une solution x et la matrice $H(x)$ est définie positive.

Principe de la méthode de Newton :

L'idée de la méthode itérative de Newton est de minimiser à chaque itération l'approximation quadratique de f (de classe C^2) au point courant x_k et donnée par le développement de Taylor d'ordre 2 :

$$f(x) \cong q(x) = f(x_k) + (\nabla f(x_k), x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)' \cdot H(x_k) \cdot (x - x_k)$$

On considère le problème : $\left\{ \min q(x), x \in \mathbb{R}^n \right\}$.

Une condition nécessaire pour que le minimum de $q(x)$ soit atteint est $\nabla q(x) = 0$ tel que

$$\nabla q(x) = \nabla f(x_k) + H(x_k)(x - x_k) = 0$$

Le vecteur généré à l'itération $(k+1)$ est le vecteur minimisant $q(x)$

$$\nabla q(x_{k+1}) = 0 \Rightarrow \nabla f(x_k) + H(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - (H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k),$$

Donc, la direction de descente choisie à chaque itération est

$$d_k = -(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k),$$

Elle est bien une direction de descente car elle vérifie la relation

$$(d_k; \nabla f(x_k)) < 0, \quad \forall k \geq 0.$$

En effet,

$$d_k = -(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) \Rightarrow \nabla f(x_k) = -H(x_k) \cdot d_k$$

$$(d_k; \nabla f(x_k)) = (d_k, -H(x_k) \cdot d_k) = -d_k^t \cdot H(x_k) \cdot d_k < 0$$

Car la matrice Hessian est définie positive.

d_k est appelée direction de Newton et les points sont successivement générés par cette méthode de la manière :

$$\begin{cases} x_0 \in R^n \text{ donné, } \rho = 1 \\ x_{k+1} = x_k - (H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) \end{cases}$$

Remarques :

- Cette méthode est bien définie à chaque itération si la matrice hessienne $H(x_k)$ est définie positive : ceci est vrai en particulier au voisinage de la solution \hat{x} cherchée si on suppose que $H(\hat{x})$ est définie positive (par continuité de H).
- La méthode de Newton est un algorithme de descente à pas fixe égal à 1.
- Si la fonctionnelle f est quadratique, strictement convexe, alors l'algorithme converge en une seule itération.

Algorithme de la méthode de Newton

1. Initialisation $K=0$,

choix de x_0 dans un voisinage de \hat{x} , ε

2. Itération k

$$x_{k+1} = x_k - (H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

3. Critère d'arrêt

si $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon$ stop

Sinon, on pose $k=k+1$, et on retourne à 2.

Remarques :

-La méthode de Newton est intéressante car sa convergente est quadratique au voisinage de la solution

c-à-d : $\|x_{k+1} - \hat{x}\| \leq \gamma \|x_k - \hat{x}\|^2, \quad \gamma > 0$

mais la convergence n'est assurée que si x_0 est suffisamment proche de \hat{x} , ce qui en limite l'intérêt pour cela nous allons donner le théorème qui garanti la convergence.

-L'étape 2 de l'algorithme revient à résoudre le système linéaire suivant:

$$H(x_k)(x_k - x_{k+1}) = \nabla f(x_k)$$

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et un point \hat{x} de \mathbb{R}^n tel que $\nabla f(\hat{x}) = 0$, et $H^{-1}(\hat{x})$ existe. Soit x_0 un point initial assez proche de \hat{x} de sorte que cette proximité s'exprime de la façon suivante :

$$\exists K_1, K_2 > 0 \text{ avec } K_1 K_2 \|x_0 - \hat{x}\| < 1. \text{ tel que}$$

- 1) $\|H(x)^{-1}\| < K_1$.
 - 2) $\|\nabla f(\hat{x}) - \nabla f(x) - H(x)(x - \hat{x})\| \leq K_2 \|x - \hat{x}\|^2$. Pour tout x satisfaisant $\|x - \hat{x}\| \leq \|x_0 - \hat{x}\|$.
- Alors, l'algorithme converge d'une façon super-linéaire (quadratique) vers \hat{x} .

Inconvénients de la méthode de Newton :

1. Cette méthode fonctionne très bien pour les petits dimensions ($1 \leq n \leq 10$) lorsque on peut calculer facilement $H(x)$ et $(H(x))^{-1}$, ce calcul nécessite des itérations plus nombreuses et coûteuses dans les problèmes des grandes tailles.
2. Comme $x_{k+1} = x_k - (H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$, le point (x_{k+1}) n'est pas toujours bien définie c-à-d possible que $(H(x))^{-1}$ n'existe pas (cela intervient typiquement lorsque la méthode atteint un région où f est linéaire donc ses secondes dérivées partielles valent zéro), et même elle est existe, la direction $d_k = -(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$, n'est pas toujours une direction de descente (si $(H(x_k))$ est définie positive alors d_k est une direction de descente).
- 3- L'inconvénient majeur de la méthode est sa sensibilité au choix du point de départ x_0 : Si ce point est mal choisis (trop loin de la solution) la méthode peut soit diverger, soit converge vers une autre solution. Pour choisir le point de départ x_0 "assez près" de \hat{x} on essaie de s'approcher de \hat{x} par une méthode de type gradient par exemple, puis on applique la méthode de Newton.

III.7. Méthode de Quasi-Newton

Les méthodes de Quasi-Newton sont élaborées pour l'optimisation et pour pallier aux inconvénients de la méthode de Newton elle :

- 1- garde la rapidité de la méthode de Newton,
- 2- évite le calcul (coûteux) de la matrice $[H(x_k)]$ à chaque itération.
- 3- plus robustes par rapport au du point de départ. On y trouve les méthodes dites "région de confiance" qui s'attachent à rendre la méthode robuste (i.e. peu sensible) par rapport x_0 .
- 4- $(H(x))^{-1}$ n'est pas nécessairement connue, peut être très chère à calculer, et $H(x_k)$ peut être très difficile à inverser. On remplace alors $(H(x_k))^{-1}$ par une matrice D_k , éventuellement constante, qui est censée approcher $H(x_k)$ ou bien son inverse. Parfois même, on remplace $(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ par un vecteur y_k facile à calculer, économisant ainsi l'encombrement de la matrice en mémoire.

Donc, l'algorithme de cette méthode est donné comme suit :

Algorithme de la méthode de Quasi-Newton

1. Initialisation $K=0$,

choix de x_0 , α_0 , ε

2. Itération k

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k D_k \nabla f(x_k)$$

3. Critère d'arrêt

$$\text{si } \|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon \quad \text{stop}$$

Sinon, on pose $k=k+1$, et on retourne à 2.

Remarque :

Dans cet algorithme, on va utiliser une approximation D_k de $(H(x_k))^{-1}$ et puis on va trouver α_k (par une recherche linéaire) qui minimise la fonction $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha_k d_k)$

Exercices du chapitre III**Exercice 1 :** -----

Soit $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où A est une matrice symétrique définie positive $N \times N$ de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ et $b \in R^n$. Notons \hat{x} le minimum de f sur R^n . On considère la suite (u_k) d'éléments de R^n telle que $u_0 \in R^n$ quelconque et

$$\forall k \in N, u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$$

où ρ est un réel positif fixé.

- Montrer que $u_{k+1} - \hat{x} = (I_n - \rho A)(u_k - \hat{x})$, où I_n désigne la matrice identité de taille N .
- Montrer que l'algorithme de gradient à pas fixe converge pour : $0 < \rho < 2/\lambda_N$

Exercice 2 : -----

Soit $f(x)$ une fonction C^1 sur R^n . On sait que dans un voisinage d'un point $a \in R^n$, f diminue le plus rapidement si l'on passe dans la direction de la pente négative de f à a , c'est à dire la direction $(-\nabla f(a))$

On commence avec une estimation, x_0 , pour un minimum local de f et considère la séquence

(x_0, x_1, \dots) où $\forall i \in N, x_{i+1} = x_i - \rho \nabla f(x_i)$ tel que : $f(x_0) \geq f(x_1) \geq f(x_2) \geq \dots$ et $f(x)$ est définie comme suit:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

- (i) Quel est l'unique minimum (global) \hat{x} de f ?
- (ii) En commençant avec $x_0 = [0 \ 0]^t$ et $\rho = 0.1$, calculer les deux itérés suivants x_1 et x_2 .
- (iii) Trouver la taille de pas maximum ρ pour que la méthode converge vers \hat{x} quel que soit le point x_0 .

Exercice 3 : -----

On cherche les minima locaux de la fonction : $J(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 \cos(x_2)$

1. Déterminer l'ensemble de points de minimum locaux en utilisant les conditions nécessaires.
2. Appliquer la méthode de Newton avec le point de départ $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observer le comportement des itérées et le point de convergence. Expliquer les observations.
3. Déterminer le modèle quadratique de la fonctionnelle J . Y a-t-il équivalence entre l'algorithme de Newton et la méthode utilisant le modèle quadratique ? Pourquoi ?

Exercice 4 :-----

Considérons le problème d'optimisation quadratique suivant $(P) \left\{ \min \frac{1}{2} X'AX - b'X \right\}$

où A est une matrice symétrique définie positive $N \times N$ de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ et $b \in \mathbb{R}^N$.

- Comment s'exprime dans ce cas la méthode de Newton ?
- Sa convergence dépend-elle du point initial ?
- En combien d'itération converge-t-elle ? Réinterpréter la méthode de Newton.

Exercice 5 :-----

On cherche à trouver le min d'une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , on utilise la méthode de gradient à pas optimal : $x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k)$ où ρ_k est la solution du problème $\left\{ \min f(x_k - \rho \nabla f(x_k)), \rho \in \mathbb{R} \right\}$

- 1- On suppose que f est convexe, montrer la convergence de la méthode ?
- 2- Quels sont les problèmes posés par la mise en œuvre numérique de la méthode ?
- 3- Proposer un algorithme basé sur la méthode du gradient à pas constant, consistant à poser

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla f(x_k) \text{ où } \rho_k \text{ est choisi dans une liste donnée à l'avance : } \rho, \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{4}, \dots, \frac{\rho}{2^k}$$

Exercice 6 :-----

Soit $A \in M_N(\mathbb{R})$ et J la fonction définie de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} par : $J(x) = e^{\|A\|x\|^2}$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N .

1. Montrer que J admet un minimum (on pourra le calculer. . .).
2. On suppose que la matrice A est inversible, montrer que ce minimum est unique.
3. Ecrire l'algorithme du gradient à pas optimal pour la recherche de ce minimum. [On demande de calculer le paramètre optimal ρ_k en fonction de A et de x_k]. A quelle condition suffisante cet algorithme converge-t-il ?

Exercice 7 :-----

On considère la fonction f définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4xy$

- 1- Trouver les points critiques et la nature de chacun d'entre eux.
- 2- On applique l'algorithme de gradient à pas fixe à la minimisation de f avec un pas fixé ρ . Prouver que, pour toute initialisation (x_0, y_0) , l'algorithme converge, pour ρ assez petit, vers un point critique de f . On choisit $x_0 = y_0 = 1$, Que ce passe-t-il si $\rho = 0.25$? si $\rho = 0.5$?

Exercice 8 :-----

Soit la fonction de Rosenbrock définie comme suit : $f(X) = f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$

- 1- Calculer le gradient et la matrice Hessienne de la fonction f .
- 2- Vérifier que $\hat{x} = [1, 1]^T$ est un minimum local de f .
- 3- Calculer les 5 premiers itérés de la méthode de Newton pour minimiser f en commençant par $x_0 = [-1, -2]^T$. Calculer la norme de l'erreur $\|x - \hat{x}\|$ à chaque itération et déterminer si le taux de convergence est quadratique.

Solutions des exercices

Chapitre I

Exercice 1 :

$$1) \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y - x^2 \geq 0\}$$

L'ensemble S est un convexe si $\forall X_1, X_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1), \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S$.

Soit X_1, X_2 deux vecteurs de S, alors

$$X_1 \in S \Rightarrow X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y_1 - x_1^2 \geq 0, \quad \text{on obtient}$$

$$X_2 \in S \Rightarrow X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y_2 - x_2^2 \geq 0$$

$$\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que :}$$

$$[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] - [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 = [\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] - [\lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2]$$

$$[\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2] - [\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]^2 \geq [\lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2] - [\lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2]$$

$$\geq \lambda x_1^2(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)x_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)[x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2] = \lambda(1-\lambda)(x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

d'où le résultat.

$$2) \quad S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

L'ensemble S est un convexe si $\forall X_1, X_2 \in S, \forall \lambda \in (0,1), \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S$.

Soit X_1, X_2 deux vecteurs de S, alors

$$X_1 \in S \Rightarrow X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, x_1 + y_1 \leq 1, \quad \text{on obtient}$$

$$X_2 \in S \Rightarrow X_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x_2 \geq 0, y_2 \geq 0, x_2 + y_2 \leq 1$$

$$\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \in \mathbb{R}^2 :$$

avec

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0 \text{ car } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda \in (0;1) \text{ et } (1-\lambda) \in (0;1)$$

et

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq 0; \text{ car } y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \lambda \in (0;1) \text{ et } (1-\lambda) \in (0;1)$$

de plus

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S.$$

et donc S est un convexe

Exercice 2 : Vraie ou fausse (justifier).....

1- La somme de deux convexes est un convexe : vraie

Soient S_1, S_2 deux convexes de \mathbb{R}^n . La somme de ces convexes est l'ensemble

$$S = S_1 + S_2 = \{x = x_1 + x_2 / x_1 \in S_1 \text{ et } x_2 \in S_2\}$$

Soit X, Y deux vecteurs de S , alors

$$X \in S \Rightarrow X = x_1 + x_2 \text{ tel que } x_1 \in S_1, x_2 \in S_2,$$

$$Y \in S \Rightarrow Y = y_1 + y_2 \text{ tel que } y_1 \in S_1, y_2 \in S_2$$

on obtient

$$\begin{aligned} \lambda X + (1-\lambda)Y &= \lambda(x_1 + x_2) + (1-\lambda)(y_1 + y_2) \\ &= (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \end{aligned}$$

Comme S_1, S_2 sont des convexes de \mathbb{R}^n ; alors

$$\lambda X + (1-\lambda)Y = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \in S_1 + S_2$$

Donc, la somme de deux convexes est un convexe.

2- Le produit de deux convexes est un convexe : Fausse

3- Soit $S_i \in \mathbb{R}^n$, ($i=1, \dots, n$), convexe. Alors $(\bigcap_{i=1, n} S_i)$ est un convexe : vraie

4- Soit un ensemble $S \in \mathbb{R}^n$ convexe. Alors \bar{S} convexe : vraie.

5- Soient un ensemble $S \in \mathbb{R}^n$ convexe et deux réels positifs α, β . Alors $\alpha S + \beta S = (\alpha + \beta)S$ vraie.

- L'inclusion $(\alpha + \beta)S \subset \alpha S + \beta S$ est toujours vraie.

- Dans le cas α, β sont positive, l'inclusion inverse provient du fait que :

$$\forall x, y \in S, \alpha S + \beta S \ni \alpha x + \beta y = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} x + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y \right) \in (\alpha + \beta)S$$

6- Tout ensemble affine est convexe : vraie car un ensemble S de \mathbb{R}^n est dit affine si :

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S.$$

Exercice 4 :

- 1- La composée de deux fonctions convexes n'est pas forcément convexe. En effet, les fonctions

$$g(x) = -x \text{ et } f(x) = x^2$$

Sont bien convexes sur \mathbb{R} , et pourtant

$$g \circ f(x) = -x^2$$

n'est pas convexe sur \mathbb{R} .

Remarque :

Soient f une fonction convexe et g une fonction convexe croissante, alors

$$g \circ f \text{ est convexe.}$$

- 2- Soient f et g deux fonctions convexes sur l'intervalle I de \mathbb{R} , donc

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in (0,1) \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in (0,1) \quad g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

Or si on pose $h = \sup(f; g)$

$$f(x) \leq h(x) \text{ et } g(x) \leq h(x)$$

Donc

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$$

De même

$$\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$$

Donc

$$\sup(f(\lambda x + (1-\lambda)y), g(\lambda x + (1-\lambda)y)) = h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$$

et h est bien convexe.

En revanche, pour $\inf(f, g)$ cela ne marche pas, il suffit de prendre $f(x) = x$; $g(x) = 0$ qui sont convexes.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la fonction définie par, $N \times N$ est une matrice A avec $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$

symétrique et $b \in \mathbb{R}^N$.

- a- Montrons que f est différentiable sur \mathbb{R}^N .

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } h \in \mathbb{R}^N, \text{ on a } f(x+h) &= \frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) \\ &= \frac{1}{2}(Ax, x) + (Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) - (b, x) - (b, h) \\ &= f(x) + (Ax - b, h) + (Ax, h) + \frac{1}{2}(Ah, h) \end{aligned}$$

$$\text{Si on pose } \varepsilon(h) = \frac{1}{2}(Ah, h) / \|h\|_2, \text{ alors}$$

$$|(Ah, h)| \leq \|A\| \|h\|_2^2 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(Ah, h)|}{\|h\|_2^2} = 0$$

Donc f est différentiable sur \mathbb{R}^N .

b- Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f .

D'après la question précédente,

$$df(x).h = (Ax - b, h) \text{ et } \nabla f(x) = Ax - b$$

Il est clair que la fonction f est deux fois différentiable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$d^2 f(x).h = (Ax - b, h) + (Ah, h) \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^n$$

Comme A est supposée symétrique ; on conclut que

$$d^2 f(x).(h, k) = (Ah, k) \text{ et } H(f)(x) = \nabla^2 f(x) = A.$$

c- Montrer que f est convexe ssi A est semi définie positive.

Rappelons que la fonction f est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (\nabla f(y) - \nabla f(x), y - x) \geq 0.$$

D'autre par, on a $\nabla f(x) = Ax - b$; il vient alors

$$f \text{ est convexe} \Leftrightarrow ((Ay - b) - (Ax - b), y - x) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (A(y - x), y - x) \geq 0. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (Az, z) \geq 0. \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Donc f est semi définie positive.

d- Montrer que f est strictement convexe ssi A est définie positive.

La stricte convexité de f est équivalente à

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y ; (\nabla f(y) - \nabla f(x), y - x) > 0.$$

Donc

$$f \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow ((Ay - b) - (Ax - b), y - x) > 0.$$

$$\Leftrightarrow (A(y - x), y - x) > 0. \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow (Az, z) > 0. \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$$

Donc f est définie positive.

Chapitre 2

Exercice 2

Dans le théorème d'existence du minimum (sans contraintes) d'une fonction f , montrer que l'on peut remplacer la propriété « infinie à l'infini » par la condition plus faible

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\|x\| \geq r} f(x) \right), \quad r > 0$$

Soit (v_n) une suite minimisante de f sur \mathbb{R}^n c'est-à-dire

$$f(v_n) \rightarrow \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

on a

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\inf_{\|x\| \geq r} f(x) \right), \quad r > 0$$

Donc, il existe $\delta > 0$; pour « r » assez grand, on a

$$f(v_n) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \delta \right),$$

Ainsi, pour « r » assez grand, on a

$$f(v_n) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} f(x),$$

On déduit que pour « r » assez grand, $(v_n) \in$ à la boule de rayon « r », autrement dit ; la suite (v_n) reste bornée. La suite de la démonstration est alors identique à la démonstration initiale.

Exercice 8 :-----

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = \sin(\|x\|^2) = \sin\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$$

1-Montrer que la fonction f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer son gradient.

La fonction est différentiable et même C^1 par les théorèmes généraux (somme, produit, composition) de fonction C^1 .

On calcule son gradient via ses dérivées partielles

$$\nabla f(x) = (2x_1 \cos(A), 2x_2 \cos(A); \dots; 2x_n \cos(A)) \quad \text{où } A = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

2-Montrer que la fonction f est C^2 et calculer sa matrice Hessienne.

La fonction est C^2 par les théorèmes généraux (somme, produit, composition) de fonction C^2 .

On calcule sa matrice hessienne $H(f)(x) = (h_{ij})$ via ses dérivées partielles secondes

$$H(f) = \begin{cases} h_{ii} = 2\cos(A) - 4x_i^2 \sin(A) \\ h_{ij} = -4x_i x_j \sin(A) \quad i \neq j \end{cases}$$

3-Déterminer tous les extrema (minima et maxima) de f sur \mathbb{R}^n .

On calcule les points critiques : on a $\nabla f(x) = 0$ si et seulement si

$$\nabla f(x) = (2x_1 \cos(A), 2x_2 \cos(A); \dots; 2x_n \cos(A)) = (0, 0, \dots, 0)$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n; \quad 2x_i \cos(A) = 0$$

Il y a donc le point $x = (0, \dots, 0)$ et tous les points

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad A = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}$$

Réciproquement, tous ces points sont des extrema : en effet, au point $x = (0, \dots, 0)$ la hessienne vaut $2I$ et est donc définie positive (CS2 : il s'agit d'un minimum local) et aux points

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad A = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x) = (-1)^k$$

(minimum si k impair et maximum si k pair).

Représenter graphiquement ces extrema dans le cas où $n = 2$.

Graphiquement, si $n = 2$, les minima sont situés en 0 en sur des cercles de rayon

$$\frac{\pi}{2} + 2p\pi, \quad p \in \mathbb{N}$$

et les maxima sur des cercles de rayon

$$\frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi, \quad p \in \mathbb{N}$$

Exercice 9 :-----

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivant :

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 + x_2$$

1- La fonction f s'écrit sous la forme quadratique $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2- Soient λ_{\min} et λ_{\max} la plus petite et la plus grande valeur propre de A . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2,$$

On a la matrice A symétrique donc ses valeurs propres sont réelles positives et ses valeurs propres forment une base orthonormée donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad x = \alpha x_1 + \beta x_2 \text{ et } Ax = \lambda x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad Ax = (A(\alpha x_1 + \beta x_2)) = (\alpha Ax_1 + \beta Ax_2) = \alpha \lambda_1 x_1 + \beta \lambda_2 x_2$$

$$(Ax, x) = (\alpha \lambda_1 x_1 + \beta \lambda_2 x_2, \alpha x_1 + \beta x_2) = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$$

Si $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ et $\lambda_2 = \lambda_{\max}$, alors

$$\lambda_{\max} \|x\|_2^2 = \lambda_2 (\alpha^2 + \beta^2) \geq (Ax, x) = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 \geq \lambda_1 (\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_{\min} \|x\|_2^2$$

Si $\lambda_1 = \lambda_{\max}$ et $\lambda_2 = \lambda_{\min}$, alors

$$\lambda_{\max} \|x\|_2^2 = \lambda_1 (\alpha^2 + \beta^2) \geq (Ax, x) = \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 \geq \lambda_2 (\alpha^2 + \beta^2) = \lambda_{\min} \|x\|_2^2$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \lambda_{\min} \|x\|_2^2 \leq (Ax, x) \leq \lambda_{\max} \|x\|_2^2$$

Remarque :

Dans le cas général :

La matrice A est symétrique, toutes ses valeurs propres λ_i sont réelles (éventuellement nulles), et elle admet une base de vecteurs propres orthonormés $B = \{v_1; v_2, \dots; v_n\}$

$$Av_i = \lambda_i v_i \text{ pour } i=1,2,\dots,n \quad \text{et } (v_i, v_j) = \delta_{ij} \text{ pour } i, j=1,2,\dots,n$$

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^N$, on a donc

$$x = \sum_{i=1}^n x_i v_i, \quad Ax = \sum_{i=1}^n x_i Av_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i v_i \quad \text{et} \quad (Ax, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

Soit finalement

$$\min_i \lambda_i \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq (Ax, x) \leq \max_i \lambda_i \sum_{i=1}^n x_i^2$$

3- Montrer que si A est définie positive, alors f coercive et admet un minimum sur \mathbb{R}^2 .

La matrice A est définie positive alors f est strictement convexe, de plus, la fonction f est coercive :

$$f(x) = \frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x) \Rightarrow f(x) \geq \lambda_{\min} \|x\|_2^2 - \|b\| \|x\| \quad \text{Car } (b, x) = \|b\| \|x\| \cos(b, x)$$

$$\text{Comme } \lambda_{\min} > 0 \text{ donc : } \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} (\lambda_{\min} \|x\|^2 - \|b\| \|x\|) = +\infty$$

Comme f est continue (car elle est quadratique), coercive et strictement convexe donc elle atteint son min.

Exercice 11 :-----

On considère la fonction g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par la relation : $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

1. Montrer que la fonction g est coercive.

On a

$$g(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \|(x, y)\|^2$$

et la fonction est donc coercive.

2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur \mathbb{R}^2 . La matrice hessienne de g en tout point x de \mathbb{R}^2 est égal à

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est définie positive et donc g est strictement convexe.

3. La fonction g est continue et coercive donc possède au moins un minimum sur \mathbb{R}^2 . De plus, g est strictement convexe donc ce minimum est unique. Ce minimum est à rechercher parmi les points critiques : ceux ci sont tels que

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

soit $x = y = 0$. Il s'agit donc du minimum de g .

Chapitre 3

Exercice 1 :

Soit $f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où A est une matrice symétrique définie positive $N \times N$ de valeurs propres

$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Notons \hat{x} le minimum de f sur \mathbb{R}^n . On considère la suite (u_k) d'éléments de \mathbb{R}^n telle que $u_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k)$ où ρ est un réel positif fixé.

1-Montrer que $u_{k+1} - \hat{x} = (I_n - \rho A)(u_k - \hat{x})$, où I_n désigne la matrice identité de taille N .

La fonction f est quadratique donc $\nabla f(x) = Ax - b$ et comme \hat{x} est le minimum de f sur \mathbb{R}^n , on obtient

$$\nabla f(x) = Ax - b = 0 \Rightarrow \hat{x} = A^{-1}b$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k - \rho \nabla f(u_k) \Rightarrow u_{k+1} = u_k - \rho(Au_k - b)$$

$$\Rightarrow u_{k+1} - \hat{x} = u_k - \rho(Au_k - b) - \hat{x} = (u_k - \hat{x}) - \rho A(u_k - \hat{x})$$

$$\Rightarrow u_{k+1} - \hat{x} = (I_n - \rho A)(u_k - \hat{x})$$

2-Montrer que l'algorithme de gradient à pas fixe converge pour : $0 < \rho < 2/\lambda_N$

Supposons que $0 < \rho < 2/\lambda_N$ et notons $e_n = u_n - \hat{x}$. Pour établir la convergence de la méthode GPF, nous allons montrer que la norme de l'erreur e_n tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Observons d'abord qu'on a $b = A\hat{x}$:

$$e_{n+1} = u_{k+1} - \hat{x} = (I_n - \rho A)(u_n - \hat{x}) = (I_n - \rho A).e_n$$

On sait qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de A , notons par $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Soit

$$y \in R^n \Rightarrow y = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad (I_n - \rho A)y = \sum_{i=1}^n (I_n - \rho A) \cdot y_i v_i = \sum_{i=1}^n (y_i v_i - \rho A y_i v_i) = \sum_{i=1}^n (1 - \rho \lambda_i) y_i v_i$$

Ainsi

$$\|(I_n - \rho A)y\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^n (I_n - \rho A) \cdot y_i v_i; \sum_{i=1}^n (I_n - \rho A) \cdot y_i v_i \right) = \sum_{i=1}^n (1 - \rho \lambda_i)^2 y_i^2$$

$$\Rightarrow \max_i (1 - \rho \lambda_i)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \max_i (1 - \rho \lambda_i)^2 \|y\|_2^2$$

$$\|e_{n+1}\|_2^2 = \|(I_n - \rho A)e_n\|_2^2 \leq \left(\max_i (1 - \rho \lambda_i)^2 \right) \|e_n\|_2^2$$

Donc

$$\|e_{n+1}\|_2 \leq \left(\max_i |1 - \rho \lambda_i| \right) \|e_n\|_2$$

Notons $\max_i |1 - \rho \lambda_i| = B_\rho$. Par raisonnement par récurrence ; on obtient

$$\|e_n\|_2 \leq B_\rho^n \|e_0\|_2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|e_n\|_2 \leq \|e_0\|_2 \lim_{n \rightarrow +\infty} B_\rho^n = 0$$

car $B_\rho < 1$ en utilisant $0 < \rho < 2/\lambda_N$.

Exercice 2 :-----

Soit $f(x)$ une fonction C^1 sur R^n . On sait que dans un voisinage d'un point $a \in R^n$, f diminue le plus rapidement si l'on passe dans la direction de la pente négative de f à a , c'est à dire la direction $-\nabla f(a)$

On commence avec une estimation, x_0 , pour un minimum local de f et considère la séquence

(x_0, x_1, \dots) où $\forall i \in N, x_{i+1} = x_i - \rho \nabla f(x_i)$ tel que : $f(x_0) \geq f(x_1) \geq f(x_2) \geq \dots$ et $f(x)$ est définie comme suit:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^t \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x$$

(i) Quel est l'unique minimum (global) \hat{x} de f ?

La fonction f est quadratique de la forme $f(x) = \frac{1}{2} x^t A x - b^t x$ tel que $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc f est

continue, de plus elle est coercive et strictement convexe (sa matrice hessienne est définie positive car ses valeurs propres (4 et 8) sont strictement positive) ; f alors, admet un unique minimum global \hat{x} caractérisé par

$$\begin{aligned} \nabla f(\hat{x}) = 0 &\Rightarrow A\hat{x} = b \Rightarrow \hat{x} = A^{-1}b \\ &\Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}^t \Rightarrow \hat{x} = (0.25; 0.25) \end{aligned}$$

- (ii) En utilisant la méthode de gradient à pas fixe pour calculer les deux itérés suivants x_1 et x_2 . En commençant avec $x_0 = [0 \ 0]^t$ et $\rho = 0.1$,

On a $\forall i \in N, x_{i+1} = x_i - \rho \nabla f(x_i)$ avec

$$\nabla f(x) = Ax - b = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$x_1 = x_0 - \rho \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (0.1) \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 - \rho \nabla f(x_1) = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} + (0.1) \times \begin{pmatrix} 6 \cdot (0.1) - 2 \cdot (0.1) - 1 \\ 2 \cdot (0.1) - 6 \cdot (0.1) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.16 \end{pmatrix}$$

- (iii) Trouver la taille de pas maximum ρ pour que la méthode converge vers \hat{x} quel que soit le point x_0 .
D'après l'exercice 1, l'algorithme de gradient à pas fixe converge pour : $0 < \rho < 2/\lambda_N$

où λ_n est la valeur propre maximal de A ; qui est dans ce cas 8, donc

$$0 < \rho < \frac{1}{4} \Rightarrow \rho \in]0; 0.25[.$$

Exercice 4 :

Considérons le problème d'optimisation quadratique suivant : (P) $\left\{ \min \frac{1}{2} X'AX - b'X \right\}$

où A est une matrice symétrique définie positive $N \times N$ de valeurs propres $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$ et $b \in R^n$.

- Comment s'exprime dans ce cas la méthode de Newton ?

L'algorithme de la méthode de Newton s'exprime sous la forme suivante

$$\forall i \in N, x_{i+1} = x_i - [H(x_i)]^{-1} \cdot \nabla f(x_i)$$

$$\forall i \in N, x_{i+1} = x_i - A^{-1} \cdot (Ax_i - b) = A^{-1}b$$

$$x_{i+1} = A^{-1}b$$

Puisque la matrice A est définie positive; alors $\hat{x} = A^{-1}b$ est l'unique minimum de f sur R^n ; ainsi, la méthode de newton équivaut à la résolution directe.

- Sa convergence dépend-elle du point initial ? En combien d'itération converge-t-elle ?

La convergence de la méthode de Newton pour cette fonction quadratique se fait en une itération et ne dépend pas du point initial.

Bibliographie

- [1] **G. Allaire**, Analyse numérique et optimisation, Edition 2002.
- [2] **M. Belloufi**, Cours d'optimisation sans contraintes, 2015
- [3] **M. Bergounioux**, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod, Paris, 2001.
- [4] **M. Bierlaire**, Introduction à l'optimisation différentiable, PPUR, 2006.
- [5] **J-F. Bonnans, J-C. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizàbal**, Optimisation Numérique, Aspects théoriques et pratiques, Springer M&A 27, 1997.
- [6] **O. Brun**, Eléments d'optimisation, INSA, 2010.
- [7] **P. Ciarlet**, Introduction a l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Masson, 1988.
- [8] **Y. Dodge**, Optimisation appliquée, Springer, 2005.
- [9] **R. Fletcher**, Practical Methods of Optimization vol. 1 : Unconstrained Optimization, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [10] **J. C. Gilbert** , Eléments d'optimisation différentiable : théorie et algorithmes, Notes de cours, École Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Paris, (2007).
- [11] **J. C. Gulioli** , Introduction à l'optimisation, Ellipses, 1994.
- [12] **J-B. Hiriart-Urruty**, Optimisation et analyse convexe, exercices corrigés, EDP sciences, 2009.
- [13] **A. Iouditski**, Optimisation et analyse convexe, Notes de cours. 2002.
- [14] **J. Nocedal, and S. J. Wright**, Numerical Optimization, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, second ed, 2006.
- [15] **R.T. Picard**, Convexité et applications, Notes de cours. Université de Rennes 1.
- [16] **G.R. Walsh**, Methods of optimization, A wiley- Interscience Publication, 1975.

Sites Internet

- 1- <http://dumas.perso.math.cnrs.fr/LSMA651-2011.html>
- 2- <http://dumas.perso.math.cnrs.fr/>
- 3- <http://aeropedia.enac-aerospace.eu/index.php?title=Optimisation>
- 4- https://www.ljll.math.upmc.fr/~boulmezaoud/OUTILS_PAGE/affiche_text.php?page=ens&lang=0